

**Arbeitsberichte der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt
Rapports de travail de l'Institut Suisse de Météorologie
Rapporti di lavoro dell'Istituto Svizzero di Meteorologia
Working Reports of the Swiss Meteorological Institute**

Zürich

No. 141

CALCUL DE LA ROUTE OPTIMALE D'UN VOILIER
APPLICATION A LA COURSE AUTOUR DU MONDE
1985 - 1986 DU VOILIER UBS-SWITZERLAND

par

Jacques Ambühl, Genève
Pierre Eckert, Genève

Mars 1987

Recherche opérationnelle	519.14
Interprétation climatologique	551.552 (26)
Navigation	656.61

Résumé

La route optimale d'un voilier effectuant une course transocéanique est calculée à partir des données de vent soufflant à la surface de la mer extraites des archives du Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme.

La programmation dynamique est utilisée pour déterminer un arbre de routes optimales dans un graphe complet préalablement choisi.

Le voilier est décrit par sa polaire, fonction non-linéaire associant la vitesse du bateau à chaque figure de vent sur la route.

Les contraintes géographiques liées à la présence de continents sont introduites.

L'utilisation de ce dispositif dans le cadre de la Course autour du Monde du voilier UBS-Switzerland est présentée.

Zusammenfassung

Aufgrund von Winddaten von der Meeresoberfläche, die dem Archiv des Europäischen Zentrums für mittelfristige Wettervorhersage entnommen wurden, wird die beste Route eines Segelschiffes zur Wettfahrt-Durchquerung der Weltmeere berechnet.

Es wird die dynamische Programmierung angewendet, um einen Baum der besten Route in einem vollständig im voraus ausgewählten Graph zu bestimmen.

Das Segelschiff wird durch seine sog. Polare beschrieben, eine nicht-lineare Funktion, welche die Geschwindigkeit des Schiffes mit jedem Windfeld auf der Route in Zusammenhang bringt.

Die geographischen Bedingungen (Küstenlinien der Kontinente) wurden berücksichtigt.

Es wird die Anwendung dieses Arbeitsschemas im Rahmen der Wettfahrt um die Welt des Segelschiffes UBS-Switzerland präsentiert.

Riassunto

La rotta ottimale di un veliero effettuante una competizione transoceanica è stata calcolata in base ai dati dei venti soffianti sulla superficie del mare, estratti dagli archivi del Centro Europeo delle Previsioni a Media Scadenza.

La programmazione dinamica viene utilizzata per determinare un albero delle rotte ottimali in un grafico completo, scelto precedentemente.

Il veliero è descritto dalla sua polare, funzione non-lineare che associa la velocità del battello ad ogni campo di vento sulla rotta.

Sono state considerate le limitazioni geografiche legate alla presenza dei continenti.

Viene descritta l'utilizzazione di questo schema nel quadro della competizione attorno al mondo del veliero UBS-Switzerland.

Summary

The optimal route for a sailing boat race over oceans is computed from surface wind data taken from the archives of the European Center for Medium-range Weather Forecasts.

Dynamical programming is used to determine a tree of optimal routes in a pre-established complete graph.

The boat is characterized by its so-called polar, a non-linear function relating the speed of the boat to the wind along the route. The geographical constraints (the coast lines) have been considered in the model.

The use of this scheme for the race around the world of the boat "UBS-Switzerland" is presented.

PLAN

1.	Introduction	1
2.	Le graphe	4
3.	Le processus de décision	9
4.	La polaire	18
5.	Les vents à la surface de la mer	21
6.	Les éléments géométriques	25
7.	Circularité : relaxation et convergence	31
8.	Utilisation	41
8.	Conclusions	55
9.	Bibliographie	59

1. INTRODUCTION.

Le rapport présenté ci-après est la conclusion d'un travail entrepris à titre partiellement privé dès l'été 1984.

A cette époque, Pierre Fehlmann, skipper du voilier UBS-Switzerland devant être engagé dans la Course autour du Monde 1985-86, était à la recherche d'une méthode d'aide à la décision susceptible d'apporter une réponse aux questions suivantes:

- . Est-il possible de définir de manière générale les meilleures options devant être choisies en chacune des quatre étapes de la Course, pour un voilier donné et en tenant compte de la climatologie de l'étape ?
- . Est-il possible de mettre en place un dispositif d'aide à la décision fonctionnant en temps réel à partir de prévisions météorologiques livrées par un modèle numérique ?

La mise en évidence des options caractéristiques de chaque étape fut réalisée avant le début de chacune d'entre elles à l'aide d'une méthode classique de recherche opérationnelle, la programmation dynamique. Un dispositif d'aide à la décision fonctionnant en temps réel fut également envisagé. Il ne connut pas d'application pratique dans le cadre de la Course, ceci afin de ne pas contrevenir au règlement de celle-ci.

Bertrand Cardis, directeur de l'entreprise Décision SA, fut l'instigateur du projet. Il obtint du Service Informatique Général de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) l'autorisation d'utiliser à titre gracieux les ressources informatiques de cette Ecole dans le cadre du projet.

L'Institut Suisse de Météorologie (ISM) accepta par ailleurs de jouer le rôle d'intermédiaire entre le Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme (ECMWF) et l'Ecole Polytechnique en assurant le transfert des données climatologiques requises.

Etant donné l'intérêt scientifique et technique que suscita ce projet à l'intérieur même de l'Institut Suisse de Météorologie, nous fûmes autorisés, au cours de l'année 1985, à affecter une

partie de notre temps de travail officiel au développement et à la mise en oeuvre des programmes informatiques. Cet effort ne fut pas sans avantages pour l'ISM. Nous acquîmes en effet une compétence notoire en matière d'utilisation des banques de données du Centre Européen. Notre expérience relative à l'utilisation du modèle numérique dans des régions différentes de l'Europe, sur des champs ayant encore un caractère expérimental (les champs de vent soufflant à 10 mètres d'altitude sur la mer) eut une incidence heureuse sur la pratique de la prévision météorologique en Suisse à l'aide des données du modèle européen.

Attribuer le succès du voilier helvétique à un seul élément ne serait pas judicieux. Un formidable effet de synergie s'est développé entre un bon nombre de facteurs initialement indépendants. Ceux d'entre eux qui méritent à notre sens d'être relevés sont la qualité de corps et d'engagement de l'équipage, le haut niveau technologique mis en oeuvre lors de la construction et l'armement du voilier, l'efficacité des dispositifs logistiques engagés au long des quatre étapes, enfin, naturellement, l'investissement des sponsors.

Que l'aide à la décision présentée ci-dessous puisse ou non figurer sur cette liste, c'est une question à laquelle seul le skipper peut répondre.

Les techniques mathématiques et informatiques utilisées firent l'objet de choix. Certains éléments, certains algorithmes furent retenus, d'autres écartés. L'absence d'expérience préalable dans cette classe de problèmes nous conduisit à préférer aussi souvent que possible les solutions simples et garanties d'une certaine robustesse informatique.

Il apparaît à posteriori que nombre de ces choix furent adéquats, que certains d'entre eux seraient justiciables de révision.

Nous tenons enfin à remercier tous les collègues, toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, nous apportèrent

leur soutien :

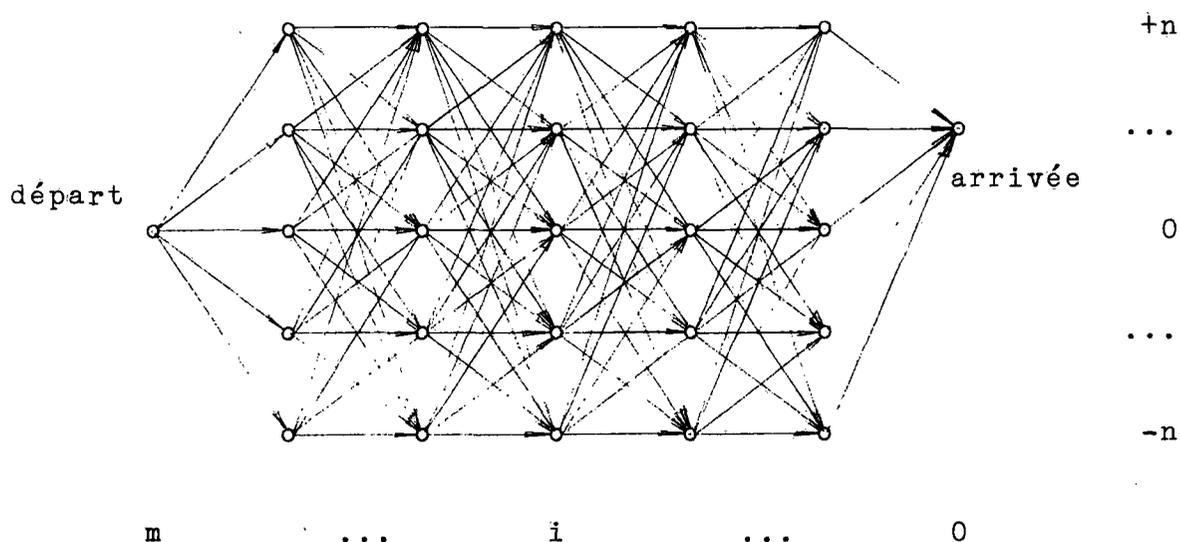
au Centre Météorologique de Genève Cointrin
au Service Informatique Général de l'EPFL
au Centre de Calcul de l'EPFL
à l'Institut Suisse de Météorologie
au Centre Européen de Prévision Météorologique à
Moyen Terme.

2. LE GRAPHE.

Considérons une chaîne de graphes orientés bipartis complets dont le premier possède un unique sommet "départ" et le dernier un unique sommet "arrivée" (figure 1).

Une route possible pour le voilier est par la suite associée à chaque chemin liant le départ à l'arrivée.

figure 1.



Adoptons les conventions suivantes :

Chaque sommet est désigné par un couple d'indices (i,j) dont :

- . $i \in \{m \dots 0\}$ repère le sommet (i,j) par le nombre d'arcs le séparant de l'arrivée.
- . $j \in \{-n \dots +n\}$ repère le sommet (i,j) par sa position dans une colonne de chaque graphe biparti.

La numérotation de l'indice i est donc rétrograde du départ ($i=m$) à l'arrivée ($i=0$). Ces deux sommets sont définis par la valeur de l'indice j les caractérisant :

- . (m, j_m) désigne le sommet de départ.
- . $(0, j_0)$ désigne le sommet d'arrivée.

m est égal à la fois au nombre de graphes bipartis concaténés et au nombre de segments de route considérés.

$2n+1$ est égal au nombre maximal d'options de route pouvant être envisagées en chaque sommet dont l'indice i est supérieur à 1.

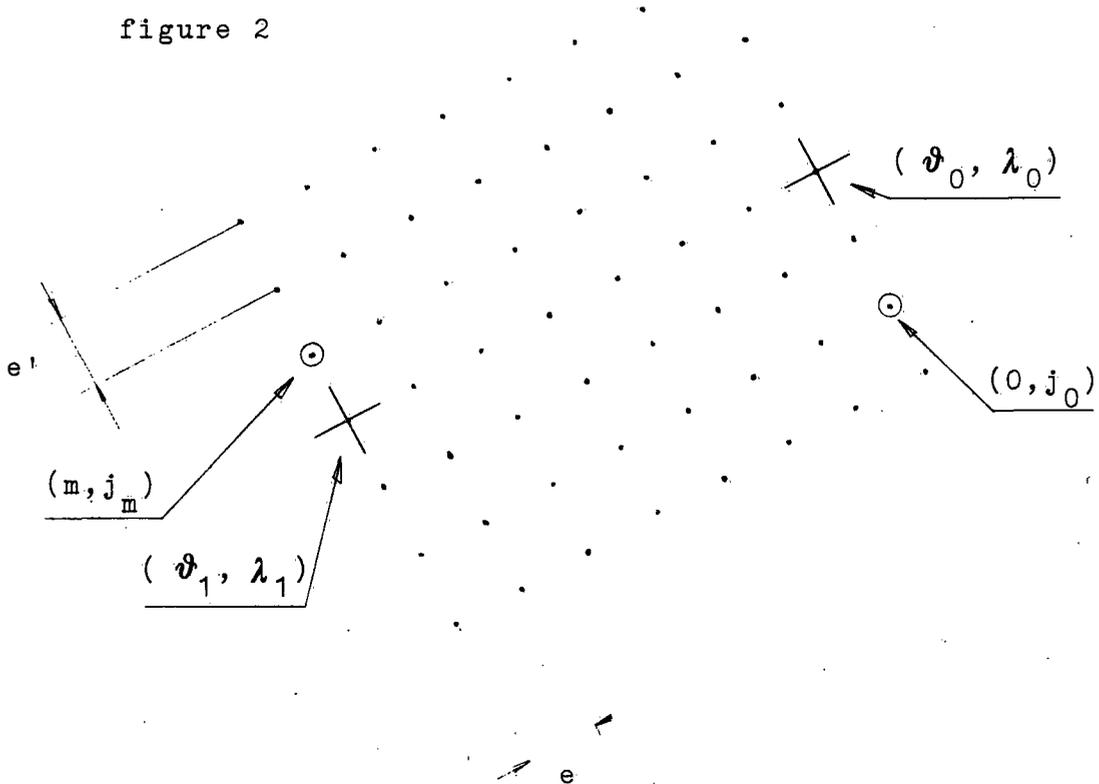
A chaque sommet (i,j) du graphe est associé une position géographique donnée en longitude ϑ et en latitude λ par une application

$$C : \{m \dots 0\} \times \{-n \dots +n\} \longrightarrow [-\pi, +\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(i,j) \longrightarrow (\vartheta_{ij}, \lambda_{ij})$$

Cette application doit être choisie en sorte que l'ensemble des sommets du graphe de la figure 1 recouvre de manière adéquate la région géographique dans laquelle le voilier est susceptible de naviguer. Pratiquement, on construit une grille semblable à celle qui est présentée à la figure 2. Cette grille est caractérisée par ses sommets d'ancrage (ϑ_1, λ_1) et (ϑ_0, λ_0) et ses dimensions caractéristiques e et e' .

figure 2



(ϑ_1, λ_1) et (ϑ_0, λ_0) , ainsi que e' sont choisis "à la main" après avoir globalement estimé quelle doit être la région recouverte par le maillage de la figure 2.

$$\text{On forme alors : } e = \frac{1}{m} \left((\vartheta_0 - \vartheta_1)^2 + (\lambda_0 - \lambda_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$c = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{m e} \quad s = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{m e'}$$

et l'application C de la page précédente est donnée par :

$$C : (i, j) \longrightarrow \begin{bmatrix} \vartheta_{ij} \\ \lambda_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(m-i) \\ e'j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Les sommets de départ et d'arrivée du graphe ne correspondent pas nécessairement aux sommets d'ancrage. Ils sont choisis en sorte de coïncider avec les positions géographiques réelles du départ et de l'arrivée. De plus, le graphe construit à l'aide de l'expression (1) couvre un domaine rectangulaire qui empiète naturellement par endroits sur les continents. Une convention doit donc être introduite, permettant de spécifier :

- . Les sommets de départ et d'arrivée.
- . Le domaine géographique dans lequel une route strictement maritime peut être envisagée.

Abordons ces deux points :

A chaque indice $i \in \{m \dots 0\}$ est associé un couple de valeurs $(\text{inf}(i), \text{sup}(i)) \in \{-n \dots +n\} \times \{-n \dots +n\}$ prescrivant les limites dans lesquelles l'indice j des sommets (i, j) peut évoluer. On définit donc pour chaque indice i l'ensemble $G(i)$ des sommets compatibles avec les contraintes géographiques :

$$G(i) = \{(i, j) \text{ tels que } \text{inf}(i) \leq j \leq \text{sup}(i)\} \quad (2)$$

Les valeurs $\text{inf}(i)$ et $\text{sup}(i)$ sont choisies à la main, en examinant une carte de géographie, après que les sommets d'ancrage et les dimensions caractéristiques aient été définis. Pratiquement, une matrice $(m+1, 2)$ contenant ces limites est chargée en mémoire parallèlement à la matrice $(m+1, 2n+1, 2)$ des coordonnées géographiques du graphe.

On désigne désormais par Graphe (avec G majuscule) la partie du graphe initial satisfaisant les contraintes géographiques spécifiées par les $m+1$ ensembles $G(i)$.

Les sommets de départ et d'arrivée sont simplement définis en spécifiant :

$$\begin{aligned} \inf(m) &= j_m = \sup(m) \\ \inf(0) &= j_0 = \sup(0). \end{aligned}$$

La figure 3 exhibe la surface couverte par le Graphe utilisé pour étudier la quatrième étape de la Course autour du monde. Les choix suivants ont été faits :

$$m = 50 \quad n = 13$$

Les sommets d'ancrage sont :

$$\begin{aligned} 21,2 \text{ W} & \quad 54,5 \text{ N} \\ 46,5 \text{ W} & \quad 37,5 \text{ S} \\ e &= 1,91^\circ \\ e' &= 1,5^\circ \end{aligned}$$

Les sommets de départ et d'arrivée sont spécifiés par

$$\begin{aligned} j_{50} &= 6 \\ j_0 &= -13. \end{aligned}$$

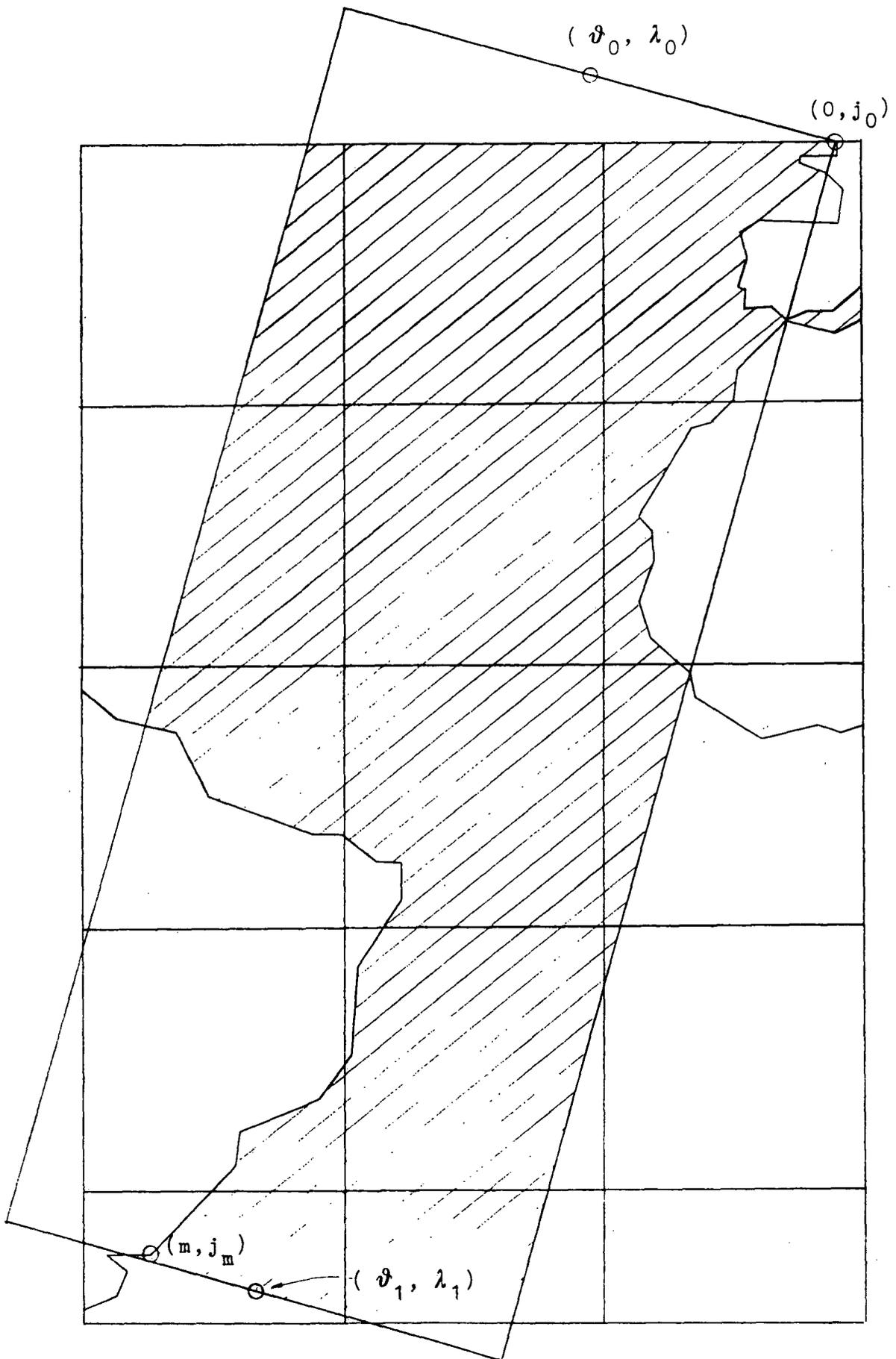
Il ne reste qu'à plonger le Graphe donné par ses coordonnées sur la sphère terrestre dans l'espace euclidien à 3 dimensions :
 $P : S^2 \rightarrow R^3$. On obtient finalement :

$$P \circ C : (i, j) \longrightarrow \underline{x}(i, j) = R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_{ij}) \cos(\lambda_{ij}) \\ \sin(\vartheta_{ij}) \cos(\lambda_{ij}) \\ \sin(\lambda_{ij}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

où : R est le rayon terrestre
 $i \in \{m \dots 0\}$
 $j \in G(i)$.

figure 3.

La région couverte par le Graphe est hachurée.



3. LE PROCESSUS DE DECISION.

Le problème consiste à déterminer dans le Graphe un chemin de durée minimale liant le sommet de départ à celui d'arrivée.

Appelons :

- . étape n^oi le passage de n'importe quel sommet de premier indice i à n'importe que sommet de premier indice i-1.
- . Δ_i le temps requis par le voilier pour traverser l'étape n^oi.

Exiger que la durée du parcours dans le Graphe soit minimale revient à requérir que la somme des temps écoulés dans chaque étape le soit :

$$\sum_{i=m}^1 \Delta_i \text{ minimale} \quad (4)$$

En chaque sommet (i,j), l'arbitraire de la décision ne porte que sur l'indice j' du sommet successeur (i-1,j') devant être choisi. Il en résulte un problème de décision séquentielle illustré à la figure 4.

Chaque étape est représentée sur la figure 4 par un casier dans lequel deux flèches entrent et deux sortent. Les indices associés aux flèches reçoivent les significations suivantes :

- . j définit quel est le sommet d'entrée dans l'étape n^oi.
j est appelé état du processus à l'étape n^oi.
- . j' définit le sommet (i-1,j') vers lequel on choisit de faire naviguer le voilier.
j' est la décision prise à l'étape n^oi dans l'état j.
- . $\Delta_{ij}^{j'}$ est la durée requise pour naviguer du sommet (i,j) au sommet (i-1,j').
 $\Delta_{ij}^{j'}$ est le coût associé à la décision j' prise à l'étape n^oi dans l'état j.

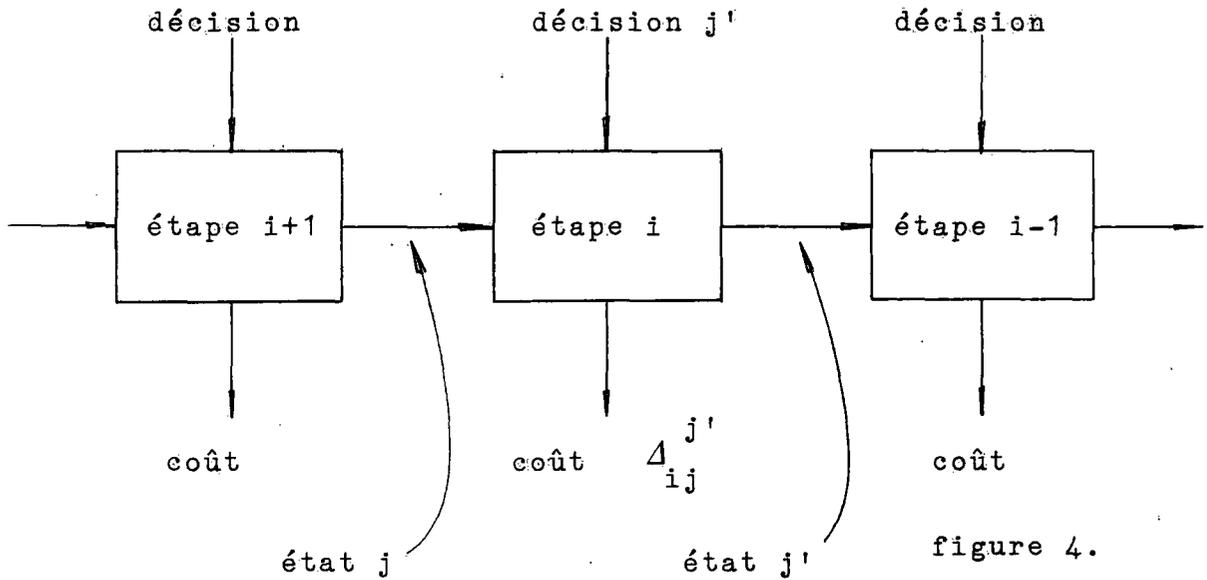


figure 4.

La première étape est l'étape *m*, pour laquelle l'état est spécifié.

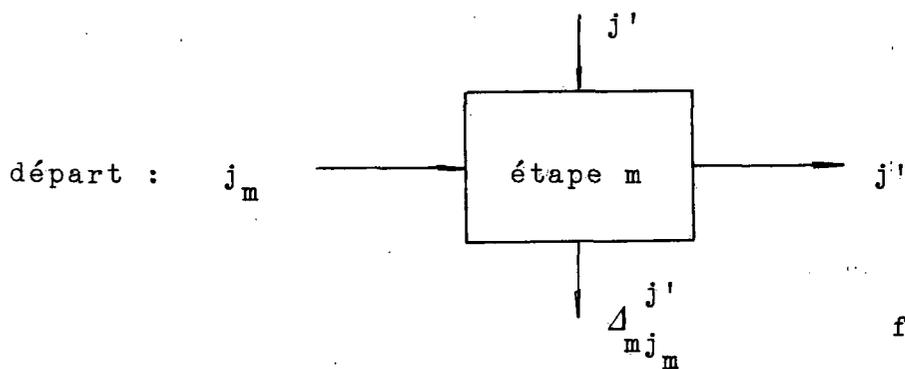


figure 4'

La dernière étape est l'étape 1 pour laquelle la décision est spécifiée.

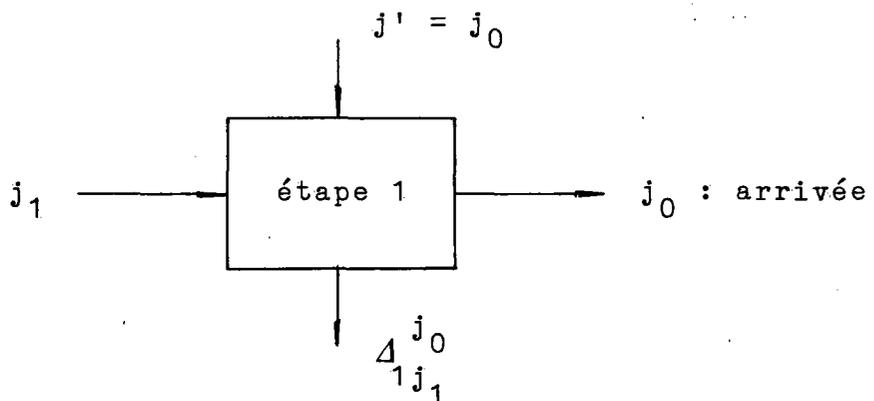


figure 4''.

En chaque étape i , les décisions prises par le passé au cours des étapes $m \dots i+1$ n'ont d'incidence sur la décision devant être prise à l'étape i que par l'état j du processus en cette étape.

La décision devant être prise à l'étape i dépend en revanche totalement de la succession des décisions qui seront prises dans le futur en chacune des étapes $i-1 \dots 1$.

L'expression (4) signifie donc que l'on doit, en chaque sommet du Graphe, minimiser le coût total d'une séquence de décisions futures. La solution à un tel problème ne peut être envisagée que si l'on possède un dispositif de prévision permettant d'évaluer les coûts associés à toutes les décisions possibles pouvant être prises en chaque étape future du parcours.

Considérons un sommet arbitraire du Graphe, par exemple (k, l) .

L'exigence (4) de durée minimale d'un parcours de ce sommet (k, l) jusqu'à l'arrivée $(0, j_0)$ peut être formulée de deux manières différentes :

- . On peut tout d'abord vouloir faire arriver le voilier aussitôt que possible au sommet $(0, j_0)$ et donc calculer une durée minimale, appelons-la D_{kl} .
- . On peut également fixer une heure arbitraire d'arrivée, appelons-la E , et calculer l'heure de départ la plus tardive du sommet (k, l) , appelons-la T_{kl} , permettant au voilier d'arriver à l'heure E au sommet $(0, j_0)$.

Choisissons, pour des raisons techniques qui apparaîtront plus tard, de développer le problème dans sa seconde formulation :

Requérir que l'heure de départ T_{kl} du sommet (k, l) soit maximale revient à prendre $k-1$ décisions (la dernière étant triviale) telles que :

$$T_{kl} = \max_{j_{k-1}}^{j_1} \left(E - \sum_{i=k}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}} \right) \quad (5)$$

Précisons tout d'abord les notations :

- i désigne l'étape n° i .
- j_i désigne l'état à l'étape n° i
- j_{i-1} désigne la décision prise à l'étape n° i .
- $\Delta_{ij_i}^{j_{i-1}}$ désigne le coût associé à cette décision, en fait, pour le voilier, la durée du parcours $(i, j_i) \longrightarrow (i-1, j_{i-1})$.
- $\max_{j_{k-1}}^{j_1} (\quad)$ indique que l'on prend les décisions $j_{k-1} \dots j_1$ en sorte de réaliser le maximum de l'expression contenue dans les parenthèses.

Abordons le développement de (5) :

$$\begin{aligned}
 T_{kl} &= \max_{j_{k-1}}^{j_1} \left(E - \sum_{i=k}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}} \right) \\
 &= E + \max_{j_{k-1}}^{j_1} \left(- \sum_{i=k}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}} \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

car max ne porte pas sur E

$$= E + \max_{j_{k-1} \in G(k-1)} \left(\max_{j_{k-2}}^{j_1} \left(- \sum_{i=k}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}} \right) \right)$$

$j_{k-1} \in G(k-1)$: cette exigence concerne naturellement tous les indices j . Elle n'est formulée que dans la dernière expression afin d'alléger l'écriture.

La possibilité de séparer le max en deux parties résulte d'une exigence profonde, le principe d'optimalité, exprimé par l'aphorisme suivant : "une stratégie est optimale si et seulement si toutes les sous-stratégies qui la composent le sont".

$$T_{kl} = E + \max_{j_{k-1} \in G(k-1)} \left(- \Delta_{kl}^{j_{k-1}} + \max_{j_{k-2}}^{j_1} \left(- \sum_{i=k-1}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}} \right) \right)$$

$\max_{j_{k-2}}^{j_1}$ ne porte pas sur $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$. De plus, $\max_{j_{k-2}}^{j_1} (- \sum_{i=k-1}^1 \Delta_{ij_i}^{j_{i-1}})$

est donné par (6) à un glissement d'indice près. Il vient donc, en substituant ci-dessus et en remarquant à nouveau que \max ne porte pas sur E :

$$T_{kl} = E + \max_{j_{k-1} \in G(k-1)} (- \Delta_{kl}^{j_{k-1}} + T_{k-1} j_{k-1} - E)$$

$$T_{kl} = \max_{j_{k-1} \in G(k-1)} (T_{k-1} j_{k-1} - \Delta_{kl}^{j_{k-1}}).$$

Le problème est donc formulé récursivement, il est totalement spécifié après que l'on ait fixé :

$$T_{0j_0} = E.$$

Remarquons que le calcul d'une durée minimum aurait conduit à :

$$D_{kl} = \min_{j_{k-1} \in G(k-1)} (D_{k-1} j_{k-1} + \Delta_{kl}^{j_{k-1}}) \quad (7)$$

$$D_{0j_0} = 0.$$

La difficulté consiste dans les deux cas à estimer $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$.

Supposons dans un premier temps pouvoir y parvenir et décrivons l'algorithme induit par les expressions :

$$T_{kl} = \max_{j_{k-1} \in G(k-1)} (T_{k-1} j_{k-1} - \Delta_{kl}^{j_{k-1}}) \quad (8)$$

$$T_{0j_0} = E$$

ainsi que la structure correspondante construite dans le Graphe.

Observons tout d'abord que la forme des expressions (8) permet de n'avoir à envisager qu'une unique décision en chaque sommet (k,l) du Graphe, ceci grâce au fait que la séquence des décisions suivantes $j_{k-2} \dots j_1$ est rendue implicite par la récursivité.

Attribuons à chaque sommet du Graphe une étiquette contenant trois informations :

- . heure : L'heure à laquelle le voilier passe au sommet (k,l) .
- . successeur : L'indice j_{k-1} du successeur du sommet (k,l) . C'est en fait la décision prise au sommet (k,l) .
- . admissible : Une variable booléenne (vraie ou fausse) dont l'usage est expliqué plus loin.

Les équations (8) conduisent alors à la mise en oeuvre d'un algorithme inductif défini comme suit :

Pas initial d'induction :

Le sommet arrivée $(0, j_0)$ est initialisé à :

- . heure = E.
- . successeur n'est pas défini.
- . admissible = vrai.

Supposons avoir effectué les calculs jusqu'à tous les sommets de premier indice $k-1$ ($k \geq 1$).

Pas d'induction :

Le sommet (k,l) reçoit :

- . heure = $\max_{j_{k-1} \in A(k-1)} (T_{k-1}^{j_{k-1}} - \Delta_{kl}^{j_{k-1}})$
où $A(k-1) = \{ (k-1, j) \text{ tels que } j \in G(k-1) \text{ et } \text{admissible}(k-1, j) \}$.
- . successeur = j_{k-1} pour lequel le maximum inscrit dans heure est réalisé.
- . admissible = vrai si un successeur est trouvé
faux si non.

Cette condition, on le verra plus loin, dépend de l'évaluation de $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$.

L'algorithme attribué à chaque sommet admissible du Graphe dont le premier indice est supérieur à zéro un unique successeur. Il est clair d'autre part que chaque sommet peut être le successeur de plusieurs sommets antérieurs. La structure ainsi créée est un arbre enraciné au sommet arrivée et croissant progressivement dans le Graphe en direction du sommet de départ.

Les sommets qui ne sont choisis par aucun de leurs prédécesseurs sont les feuilles de l'arbre. Certains sommets enfin n'appartiennent carrément pas à l'arbre. Ce sont ceux pour lesquels l'étiquette admissible a été affectée à "faux". Après que l'arbre soit développé, une unique route est définie de chaque sommet admissible en direction de l'arrivée, ceci grâce à l'unicité des successeurs en chaque sommet.

La route quittant le sommet de départ, autorisant l'heure de départ la plus tardive, est le chemin de durée minimale annoncé au début du paragraphe.

Deux tels arbres sont présentés aux figures 5 et 6. Le premier n'a qu'une valeur d'exemple, le second est l'un des arbres calculés pour étudier la troisième étape de la Course autour du Monde.

Etant enracinés au sommet arrivée, les arbres forment ce que l'on pourrait appeler, en utilisant une analogie hydraulique, "des bassins d'accumulation de décision". Cette propriété, qui sera utilisée plus loin, justifie que l'on ait choisi la deuxième des formulations envisagées à la page 11.

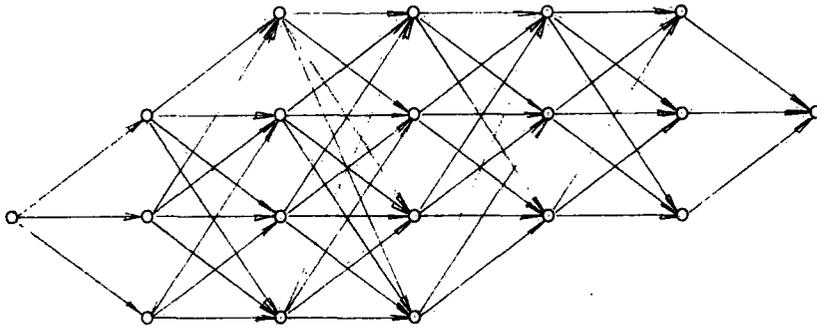


figure 5 a. Un exemple de Graphe.

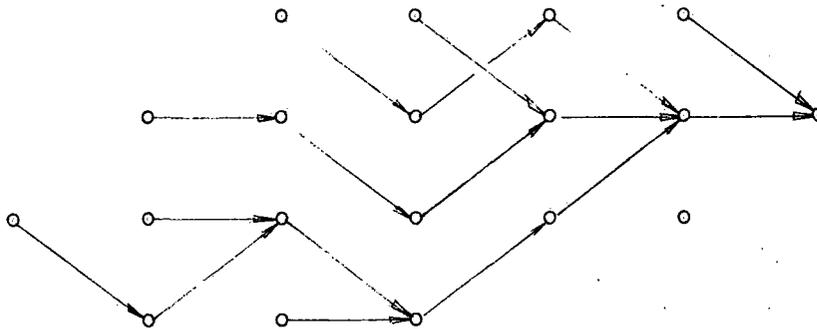


figure 5 b. Un exemple d'arbre dans ce Graphe.

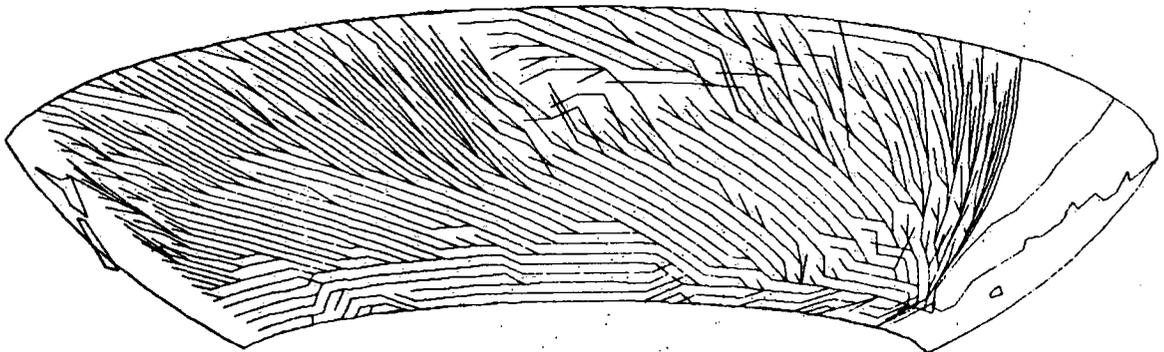


figure 6. Troisième étape de la Course autour du Monde. Polaire d'UBS-Switzerland.

Toute la suite du travail va consister à calculer les

$$\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$$

Ils sont naturellement définis comme suit :

$$\Delta_{kl}^{j_{k-1}} = \frac{d_{kl}^{j_{k-1}}}{v_{kl}^{j_{k-1}}} \quad (9)$$

où :

$d_{kl}^{j_{k-1}}$ est la longueur de l'arc $(k,l) \longrightarrow (k-1, j_{j-1})$.

$v_{kl}^{j_{k-1}}$ est la vitesse moyenne du voilier naviguant le long de l'arc $(k,l) \longrightarrow (k-1, j_{k-1})$.
Elle est calculée à l'aide de la polaire du voilier.

4. LA POLAIRE.

La polaire décrit schématiquement les performances du voilier.

A chaque :

- . Angle d'incidence du vent sur la trajectoire du voilier, noté $\alpha \in [0, \pi]$
- . Vitesse du vent relativement au repère géographique, notée \underline{W} , exprimée en noeuds (kt)

Est associée le module de la vitesse du voilier, également exprimé en noeuds :

$$\|\underline{v}\| = \rho(\|\underline{W}\|, \alpha) \quad (10)$$

La figure 7 illustre cette relation :

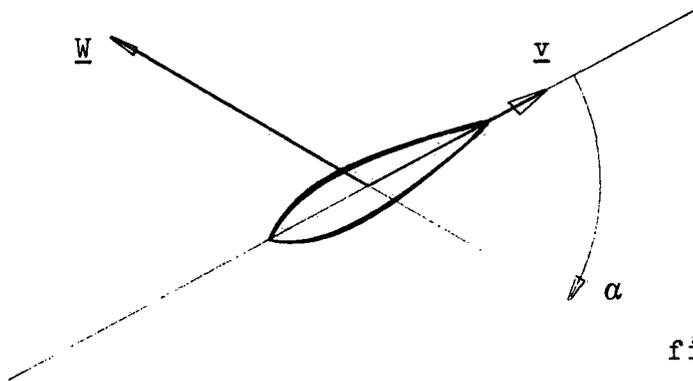


figure 7.

La polaire est donnée par l'architecte naval sous forme de table ou d'abaque. Elle peut également être mesurée expérimentalement. Il résulte de la composition de \underline{W} et \underline{v} que le vent apparent perçu sur le voilier est différent en force et en direction de \underline{W} . Les paramètres α et \underline{W} sont donc évalués relativement au repère naturel tangent à la sphère terrestre au lieu où se trouve le voilier, sans référence à la vitesse de ce dernier.

L'abaque de la figure 8 représente la polaire d'UBS-Switzerland.

- . L'angle d'incidence est reporté de 30 à 180 degrés.
- . La vitesse du vent est reportée de 0 à 50 kt.
- . La cote est proportionnelle à la vitesse du voilier.

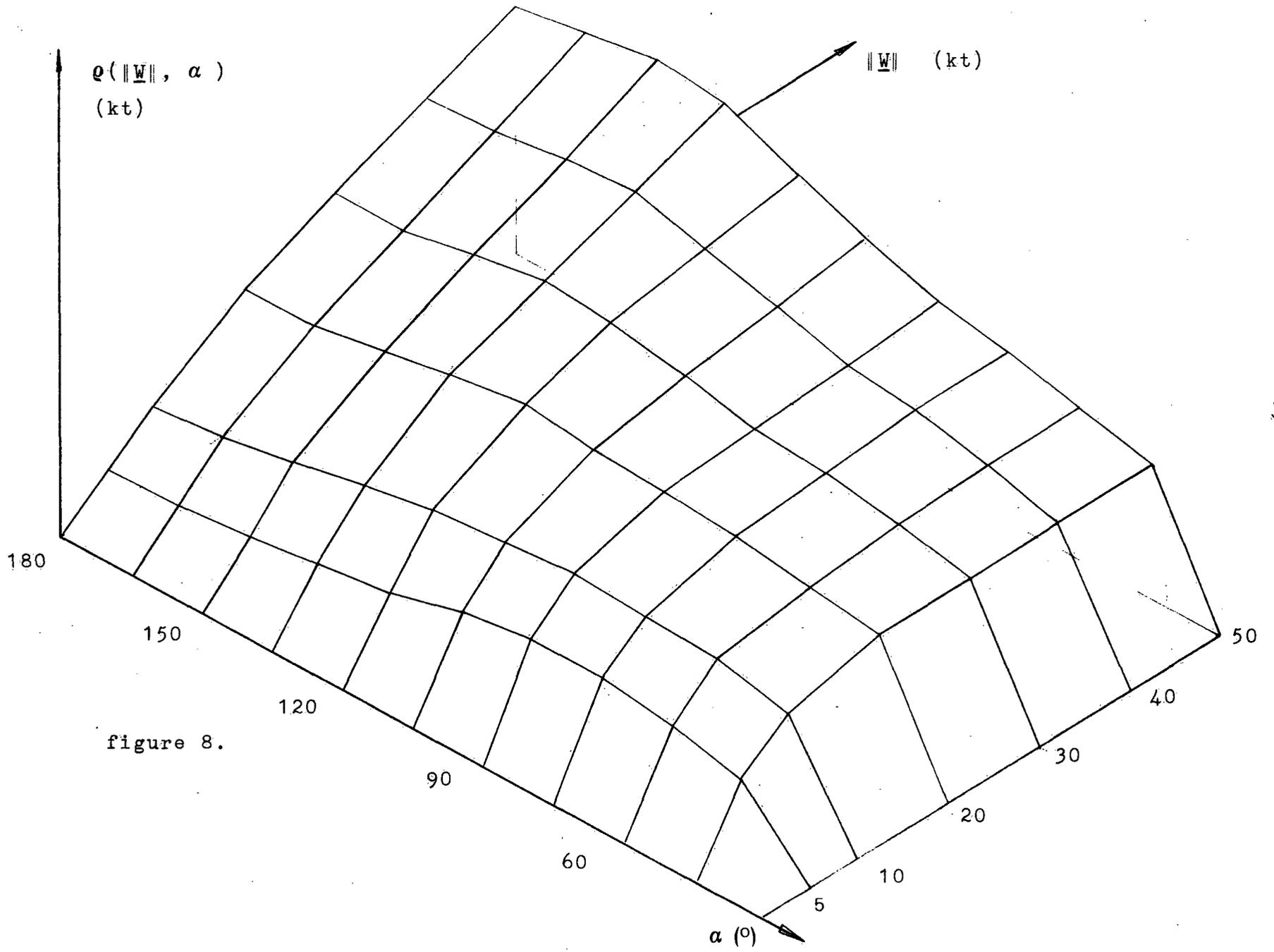


figure 8.

Quelques remarques pratiques :

La polaire d'UBS-Switzerland étant chargée en mémoire sous forme de table, un dispositif d'interpolation est mis en oeuvre pour évaluer $\|v\| = \varrho(\|W\|, \alpha)$.

Les performances du voilier ne sont en accord avec la polaire que si le réglage du gréement est optimal. La responsabilité de ce réglage incombe à l'équipage. Un mini-ordinateur installé sur UBS-Switzerland indique en tout temps l'écart instantané entre la vitesse du voilier et la polaire, ceci après que le vent réel ait été calculé à partir du vent apparent mesuré sur le voilier. Ce mini-ordinateur construit également la polaire pratique du voilier en établissant une statistique des mesures faites durant la Course.

L'état de la mer affecte les performances du voilier. Lorsqu'il navigue au près ($\alpha < 90^\circ$), les vagues le frappent par l'avant et diminuent sa vitesse, surtout par fort vent. Il est dans une certaine mesure tenu compte de cet effet dans le dessin de la polaire.

5. LES VENTS A LA SURFACE DE LA MER.

Le Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme (ECMWF) élabore et diffuse chaque jour une prévision météorologique valable pour les dix jours suivants sur toute la planète. La dynamique de l'atmosphère est décrite dans le modèle mathématique par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Une condition initiale doit donc être établie chaque jour, spécifiant l'état de l'atmosphère à une heure donnée en tous les sommets d'un maillage dense recouvrant la planète. L'élaboration de cette condition initiale représente un immense problème.

L'acquisition des données de base est effectuée en collectant les observations météorologiques effectuées dans la quasi totalité des Etats de la planète, à bord d'un bon nombre de navires commerciaux en route sur les divers océans, à bord d'un bon nombre d'avions de ligne en vol, en utilisant enfin plusieurs satellites artificiels.

Cette énorme quantité d'information est constamment transmise au Centre de Prévision via un réseau télé-informatique planétaire, le Global Telecommunication System.

Deux phases de calcul sont nécessaires à l'élaboration de la condition initiale :

La première, l'analyse, conduit à l'estimation des champs météorologiques en tous les sommets du maillage. La méthode utilisée, l'interpolation optimale, est de nature essentiellement statistique. La seconde, l'initialisation, est une opération de lissage au cours de laquelle les imperfections numériques affectant les champs météorologiques sont éliminées, ceci afin de garantir la stabilité numérique du calcul de prévision.

Il est finalement possible de recalculer, à partir des champs analysés et initialisés, les vents soufflant à un instant donné à 10 mètres d'altitude en tous les sommets du maillage.

Ces champs de vents à 10 mètres sont archivés jour après jour au Centre Européen. Ils forment la donnée météorologique de base utilisée pour le calcul des routes.

La figure 9-a illustre le champ des vents à 10 mètres d'altitude sur l'Atlantique Sud, tels qu'ils ont soufflé à 0 heure GMT le 20 octobre 1982.

La région couverte s'étend de 40° S à 30° N, de 30° W à 18° E, par pas de deux degrés. Le vent est représenté en chaque noeud par un trait satisfaisant les conditions suivantes :

- . Le vent sort du sommet.
- . La longueur du trait est proportionnelle à la vitesse du vent. 10 noeuds correspondent à 4 mm.

On distingue :

- . L'anticyclone du Golfe de Guinée, au centre duquel les vents sont quasi nuls, situé à l'entrée de ce Golfe.
- . Les alizés soufflant sur l'Atlantique de 32° S - 15° E à 5° S - 28° W dans l'hémisphère sud, de 30° N - 15° W à 12° N - 24° W dans l'hémisphère nord.
- . La ceinture de convergence inter-tropicale, caractérisée par des vents faibles et variables, située le long d'une bande s'étendant d'ouest en est à une latitude voisine de 7° N. Cette région, dans laquelle la nébulosité convective est abondante, est le pot au noir des navigateurs.
- . Les forts vents associés à la circulation des dépressions australes dans une région comprise entre 30° S et 40° S.

A la figure 9-b, une série de cinq cartes consécutives données à 0 heure GMT du 15 au 19 décembre 1982 illustre l'évolution du champ des vents à 10 mètres d'altitude sur le sud de l'Océan Indien et la Mer de Tasmanie.

Le pas de maille est à nouveau de deux degrés, la région couverte s'étend de 56° S à 30° S, de 20° E à 180° .

821020 0

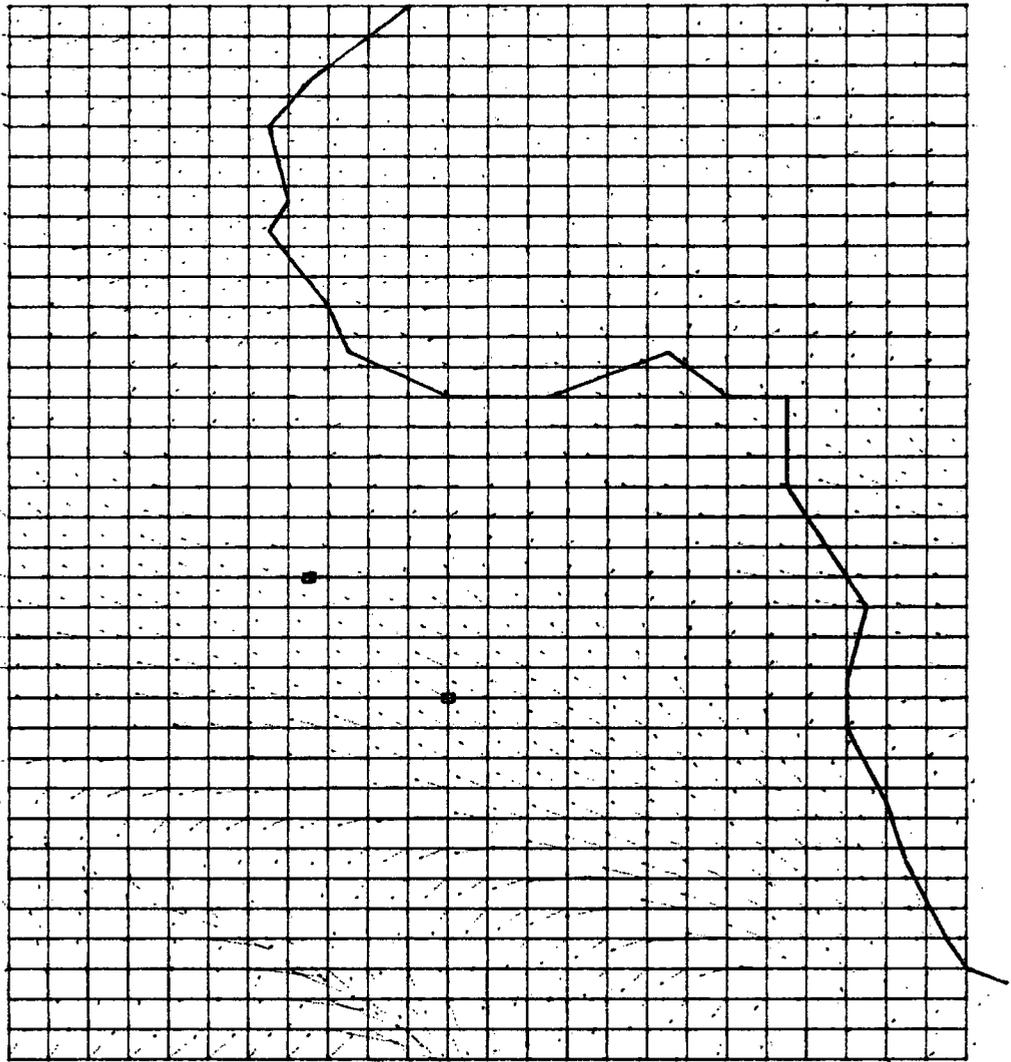


figure 9-a.

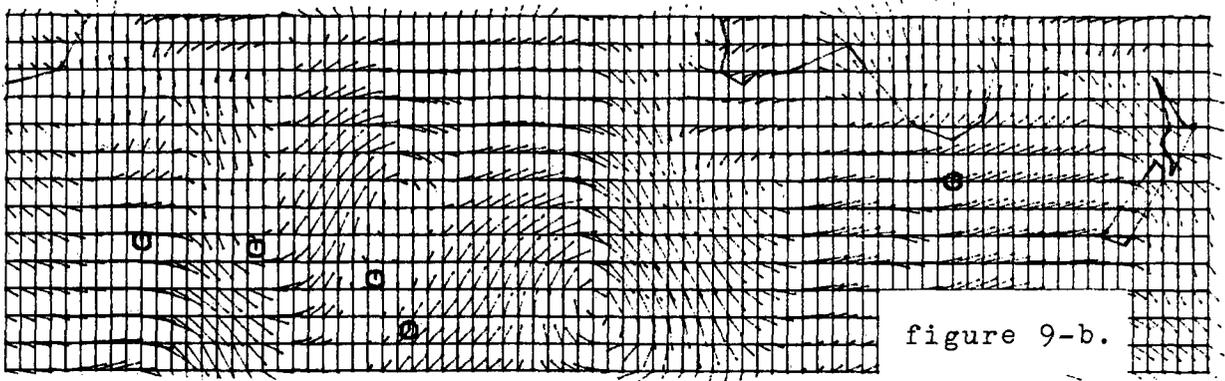
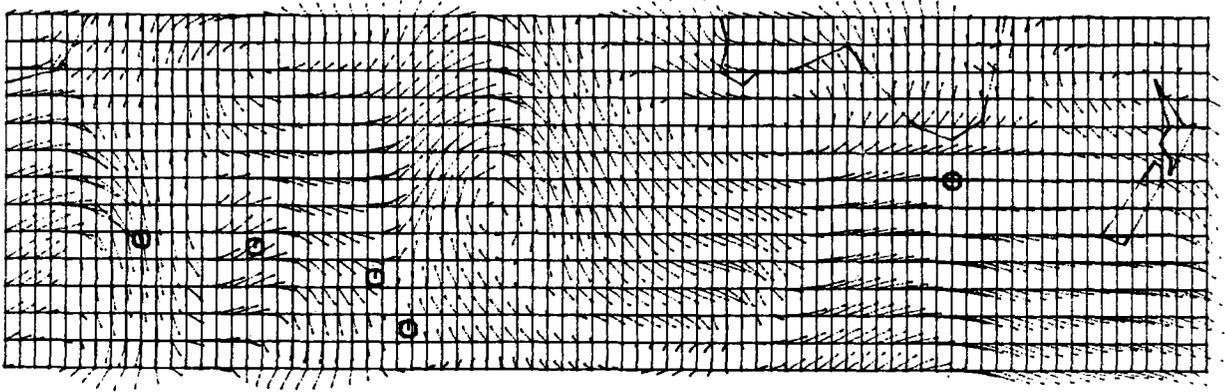
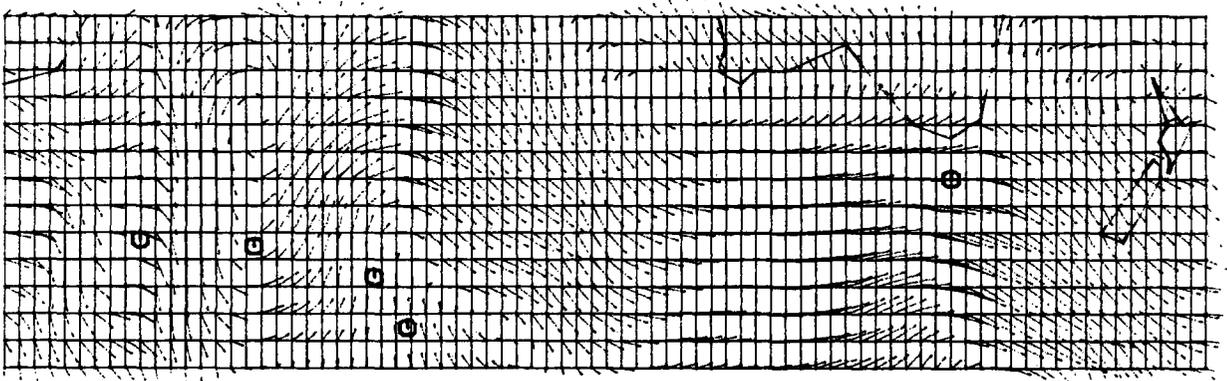
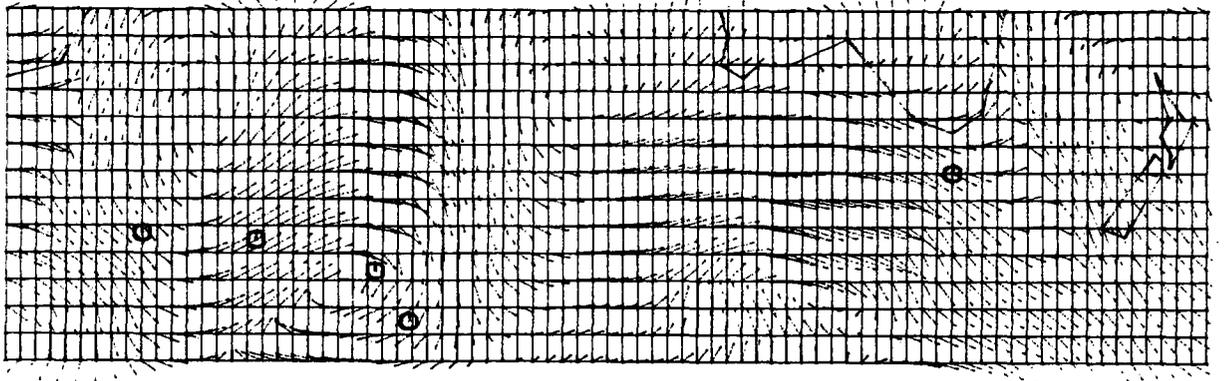
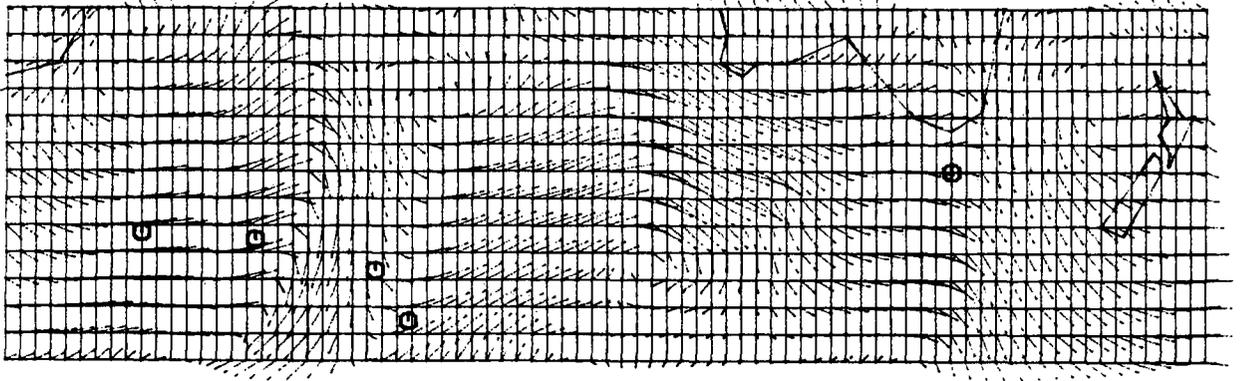


figure 9-b.

6. LES ELEMENTS GEOMETRIQUES.

Considérons un arc arbitraire $(k,1) \longrightarrow (k-1, j_{k-1})$ du Graphe et abordons le calcul de $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$.

Trois éléments doivent être estimés (figure 10) :

- I. $d_{kl}^{j_{k-1}}$: la longueur de l'arc considéré comme un arc de grand cercle sur la sphère terrestre.
- II. $\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}}$: le vent moyen soufflant sur l'arc à l'époque à laquelle le voilier le parcourt.
- III. $\alpha(\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}})$: l'angle d'incidence du vent moyen sur la trajectoire du voilier.

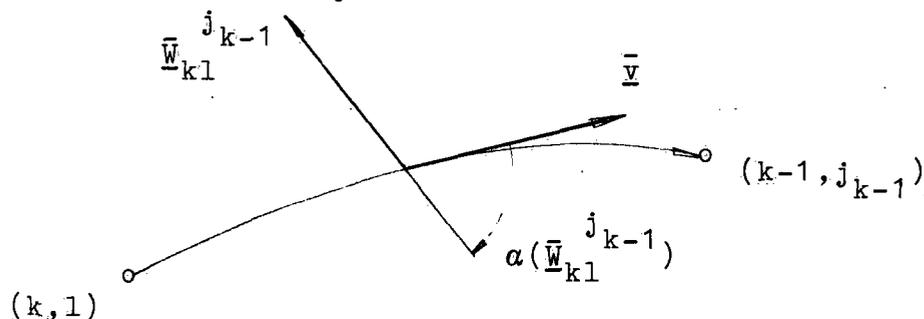


figure 10.

Les deux derniers éléments, lorsqu'ils sont introduits dans l'expression de la polaire, permettent de calculer la vitesse moyenne du voilier le long de l'arc :

$$\|\bar{V}\| = \varrho(\|\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}}\| , \alpha(\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}})).$$

$\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$ est naturellement le quotient de la longueur de l'arc par la vitesse moyenne du voilier.

$$I. \quad d_{kl}^{j_{k-1}} = R \llcorner (\underline{x}(k,1), \underline{x}(k-1, j_{k-1}))$$

où R est le rayon terrestre

$\llcorner(\dots)$ est l'angle central, exprimé en radians, entre les deux sommets de l'arc.

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\underline{x}(k,1), \underline{x}(k-1, j_{k-1}))) &= \frac{\underline{x}(k,1) \cdot \underline{x}(k-1, j_{k-1})}{\|\underline{x}(k,1)\| \|\underline{x}(k-1, j_{k-1})\|} \\ &= R^{-2} \underline{x}(k,1) \cdot \underline{x}(k-1, j_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{kl}^{j_{k-1}} &= R \operatorname{Arccos}(R^{-2} \underline{x}(k,1) \cdot \underline{x}(k-1, j_{k-1})) \quad (10) \\ &= R \operatorname{Arccos}(\cos(\lambda_{kl}) \cos(\lambda_{k-1, j_{k-1}}) \cos(\vartheta_{kl} - \vartheta_{k-1, j_{k-1}}) + \\ &\quad \sin(\lambda_{kl}) \sin(\lambda_{k-1, j_{k-1}}) \sin(\vartheta_{kl} - \vartheta_{k-1, j_{k-1}})). \end{aligned}$$

II. Considérons un sommet $(k,1)$ du Graphe. Le vent horizontal soufflant à 10 mètres d'altitude en ce sommet à un instant arbitraire t , noté $\underline{W}_{kl}(t)$, est donné par ses composantes horizontales dans le repère naturel tangent à la sphère terrestre $[\underline{e}_{\vartheta_{kl}}, \underline{e}_{\lambda_{kl}}]$ au sommet $(k,1)$ (cf figure 11).

$$\underline{W}_{kl}(t) = u_{kl}(t) \underline{e}_{\vartheta_{kl}} + v_{kl}(t) \underline{e}_{\lambda_{kl}}. \quad (11)$$

$u_{kl}(t)$, respectivement $v_{kl}(t)$, sont les composantes zonale, respectivement méridionale de $\underline{W}_{kl}(t)$.

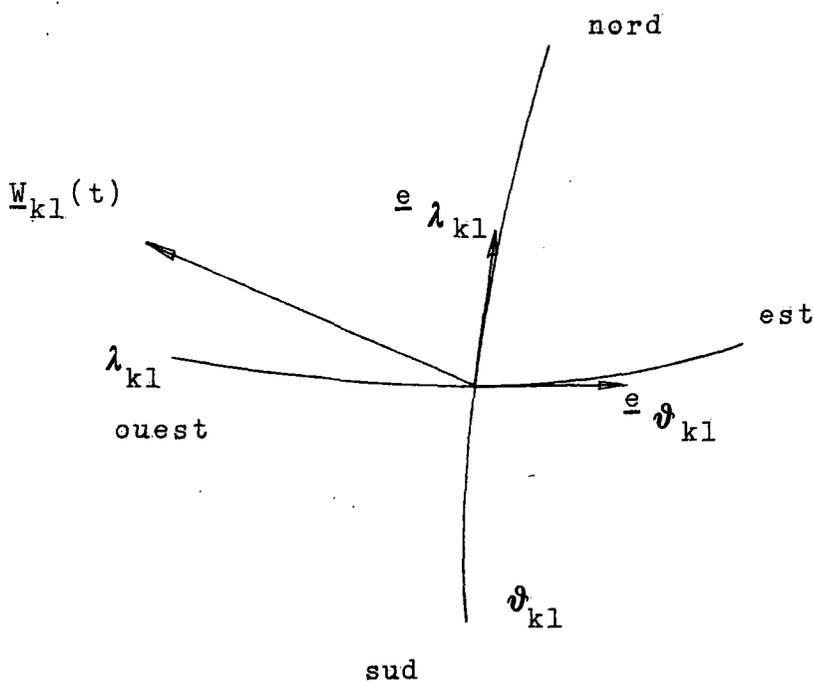


figure 11.

Evaluons le vent moyen frappant le voilier durant son parcours le long de l'arc $(k,l) \rightarrow (k-1, j_{k-1})$. La notion de "vent moyen" soufflant sur l'arc est ambiguë. Elle ne prend un sens que si le champ de vent n'est pas trop fortement variable, tant en fonction du temps, au cours de la période requise par le voilier pour parcourir l'arc, qu'en fonction de l'espace.

On conçoit intuitivement que les effets pervers de la variabilité du champ de vent ne peuvent être atténués que si la longueur de l'arc est choisie suffisamment petite.

Divers procédés d'évaluation de ce vent moyen peuvent être envisagés, avec des degrés de raffinement divers. Celui qui est présenté ci-dessous a été choisi pour l'étude de la Course autour du Monde.

Plaçons-nous au milieu de l'arc, soit à l'endroit de coordonnées $(\bar{\vartheta}, \bar{\lambda})$ définies par :

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta} &= \frac{1}{2} (\vartheta_{kl} + \vartheta_{k-1 j_{k-1}}) \\ \bar{\lambda} &= \frac{1}{2} (\lambda_{kl} + \lambda_{k-1 j_{k-1}})\end{aligned}\tag{12}$$

et désignons par $[\underline{e}_{\bar{\vartheta}}, \underline{e}_{\bar{\lambda}}]$ le repère naturel tangent à la sphère en ce point (figure 12).

L'algorithme de programmation dynamique (chapitre 3) fait passer le voilier à l'heure $T_{kl} = T_{k-1 j_{k-1}} - \Delta_{kl}^{j_{k-1}}$ au sommet (k,l) , respectivement à l'heure $T_{k-1 j_{k-1}}$ au sommet $(k-1, j_{k-1})$. Forts de ces éléments, définissons comme suit les composantes zonale et méridionale du vent moyen sur l'arc :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{kl}^{j_{k-1}} &= \frac{1}{2} (u_{kl}(T_{kl}) + u_{k-1 j_{k-1}}(T_{k-1 j_{k-1}})) \\ \bar{v}_{kl}^{j_{k-1}} &= \frac{1}{2} (v_{kl}(T_{kl}) + v_{k-1 j_{k-1}}(T_{k-1 j_{k-1}}))\end{aligned}$$

L'évaluation du vent moyen induit une circularité pour l'algorithme de décision. En effet, l'heure à laquelle le voilier passe au sommet $(k-1, j_{k-1})$, $T_{k-1}^{j_{k-1}}$ est connue de l'algorithme alors que T_{kl} , intervenant dans le calcul de $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$, ne l'est pas et dépend justement de $\Delta_{kl}^{j_{k-1}}$. Cette circularité nous réserve de sérieuses difficultés. Supposons toutefois savoir les résoudre et donc disposer des heures de passage du voilier aux deux sommets de l'arc.

Posons finalement :

$$\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}} = \bar{u}_{kl}^{j_{k-1}} e_{\bar{\vartheta}} + \bar{v}_{kl}^{j_{k-1}} e_{\bar{\lambda}} \quad (13)$$

Il est clair que cette moyenne n'a un sens que s'il existe une certaine corrélation entre les vents soufflant à chaque extrémité de l'arc. A nouveau, on ne peut espérer une telle corrélation que si l'arc n'est pas trop long.

III. Chaque arc du Graphe est un arc de grand cercle (géodésique) correspondant au plus court chemin joignant les extrémités de l'arc sur la sphère terrestre. Dans le cas général, un mobile parcourant un arc de grand cercle suit un cap géographique variable. On appelle en navigation orthodromie une telle route. A contrario, une route suivant un cap géographique constant, une loxodromie, n'est pas minimale au sens de la distance. (exceptions : l'équateur et tous les méridiens sont à la fois des orthodromies et des loxodromies).

Le cap géographique suivi par le voilier ne change pas de manière significative lorsque l'arc n'est pas trop long.

Choisissons donc d'associer à chaque arc du Graphe un cap géographique moyen donné par le vecteur tangent à l'arc au milieu de celui-ci, soit au point de coordonnées $(\bar{\vartheta}, \bar{\lambda})$.

L'ensemble de la construction est exhibé à la figure 12 ci-dessous :

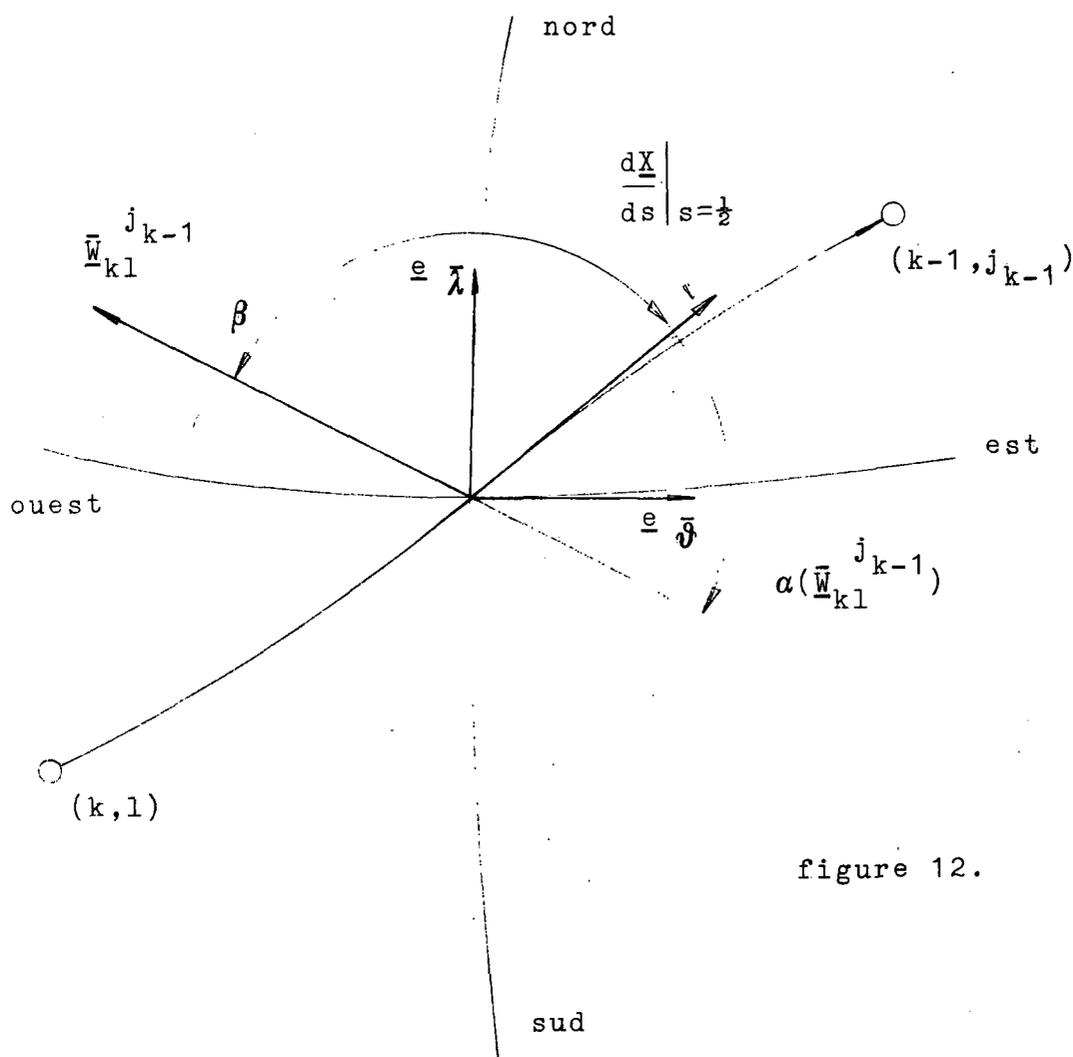


figure 12.

Construisons une abscisse curviligne $s \in [0,1]$ parcourant l'arc :

$$\underline{X}(s) = R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_{kl}(1-s) + \vartheta_{k-1 j_{k-1}} s) \sin(\lambda_{kl}(1-s) + \lambda_{k-1 j_{k-1}} s) \\ \sin(\vartheta_{kl}(1-s) + \vartheta_{k-1 j_{k-1}} s) \sin(\lambda_{kl}(1-s) + \lambda_{k-1 j_{k-1}} s) \\ \cos(\lambda_{kl}(1-s) + \lambda_{k-1 j_{k-1}} s) \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(0) = \underline{x}(k,1) \text{ et } \underline{X}(1) = \underline{x}(k-1, j_{k-1}).$$

Calculons le vecteur tangent à l'arc au milieu de celui-ci dans le repère $[\underline{e}_{\bar{\vartheta}}; \underline{e}_{\bar{\lambda}}]$:

$$\frac{d\underline{X}}{ds} \Big|_{s=1/2} = R((\vartheta_{k-1 j_{k-1}} - \vartheta_{kl}) \cos(\bar{\lambda}) \underline{e}_{\bar{\vartheta}} + (\lambda_{k-1 j_{k-1}} - \lambda_{kl}) \underline{e}_{\bar{\lambda}})$$

On lit directement sur la figure 12 :

$$\alpha(\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}) = \pi - \beta \quad \text{où}$$

$$\beta = \angle \left(\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}, \frac{dX}{ds} \Big|_{s=\frac{1}{2}} \right)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}} \cdot \frac{dX}{ds} \Big|_{s=\frac{1}{2}}}{\| \bar{w}_{kl}^{j_{k-1}} \| \cdot \left\| \frac{dX}{ds} \Big|_{s=\frac{1}{2}} \right\|}$$

Finalement :

$$\alpha(\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}) = \pi - \text{Arccos}(\beta) =$$

$$= \text{Arccos} \left(\frac{\bar{u}_{kl}^{j_{k-1}} \cos(\bar{\lambda}) (\vartheta_{k-1}^{j_{k-1}} - \vartheta_{kl}) + \bar{v}_{kl}^{j_{k-1}} (\lambda_{k-1}^{j_{k-1}} - \lambda_{kl})}{\sqrt{(\bar{u}_{kl}^{j_{k-1}})^2 + (\bar{v}_{kl}^{j_{k-1}})^2} \sqrt{\cos^2(\bar{\lambda}) (\vartheta_{k-1}^{j_{k-1}} - \vartheta_{kl})^2 + (\lambda_{k-1}^{j_{k-1}} - \lambda_{kl})^2}} \right).$$

(14)

L'expression

$$\Delta_{kl}^{j_{k-1}} = \frac{d_{kl}^{j_{k-1}}}{\varrho(\| \bar{w}_{kl}^{j_{k-1}} \|, \alpha(\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}))}$$

est, au problème de la circularité évoquée ci-dessus près, explicitée.

7. CIRCULARITE : RELAXATION ET CONVERGENCE.

Simplifions tout d'abord les notations en considérant un arc quelconque du Graphe repéré par ses sommets d'origine 2 et de destination 1 (figure 13).

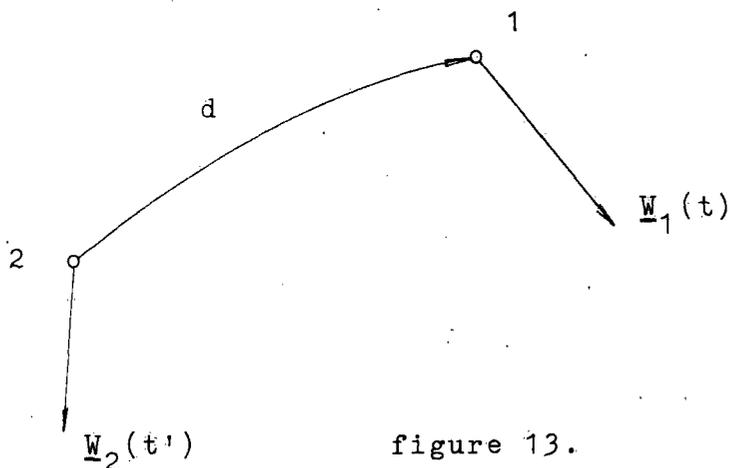


figure 13.

Appelons : d la longueur de l'arc
 $\underline{W}_1(t)$ le vent soufflant au sommet 1 à l'instant t
 $\underline{W}_2(t')$ le vent soufflant au sommet 2 à l'instant t'
 T_1 l'heure de passage du voilier en 1
 T_2 l'heure de passage du voilier en 2
 u la durée du trajet de 2 à 1.

T_1 est donné par l'algorithme de programmation dynamique.
 $\underline{W}_1(T_1)$ est par conséquent connu.

$$T_2 = T_1 - u$$

$$\underline{W}_2(T_2) = \underline{W}_2(T_1 - u).$$

Suivant les conventions établies au chapitre précédent, le vent moyen soufflant sur l'arc, \bar{W} , est donné par :

$$\bar{W} = \frac{1}{2} (\underline{W}_1(T_1) + \underline{W}_2(T_1 - u)) = \bar{W}(T_1, u).$$

u , la durée du trajet, s'exprime donc :

$$u = \frac{d}{\rho(\| \bar{W}(T_1, u) \| , \alpha(\bar{W}(T_1, u)))}$$

On remarque donc, en appelant :

$$A(u) = \frac{d}{e(\|\bar{W}(T_1, u)\|, \alpha(\bar{W}(T_1, u)))} \quad (16)$$

que l'on doit calculer, pour autant qu'il existe, un point fixe u^* de A :

$$u^* = A(u^*). \quad (17)$$

Rappelons qu'étant donné un espace métrique complet D dont la distance est définie par $e : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, une application $A : D \rightarrow D$ est dite contractante s'il existe un nombre non négatif τ , appelé coefficient de contraction tel que :

$$\tau < 1$$

et, quels que soient $x, y \in D$ on ait :

$$e(A(x), A(y)) \leq \tau e(x, y).$$

Il est possible de démontrer, lorsqu'une application est contractante, les trois résultats suivants :

- i. A est continue
- ii. A possède un point fixe : $\exists x^* \in D$ tel que $x^* = A(x^*)$
- iii. Ce point fixe est unique.

Ce résultat classique est démontré dans de nombreux ouvrages d'analyse.

Déterminer si l'application A donnée par (16) possède un point fixe u^* revient à calculer un coefficient de contraction τ et à étudier les conditions dans lesquelles ce coefficient est inférieur à 1.

Le fait que la polaire du voilier ne soit donnée que par une table, non par une expression fonctionnelle, et surtout le manque lancinant de temps m'ont conduit à n'étudier qu'un sous problème de moindre ampleur.

L'ersatz de polaire choisi est fonctionnellement défini. Il ne dépend que de l'intensité $W = \|\underline{W}\|$ du vent, pas de l'angle d'incidence sur la trajectoire du voilier hypothétique sensé être représenté.

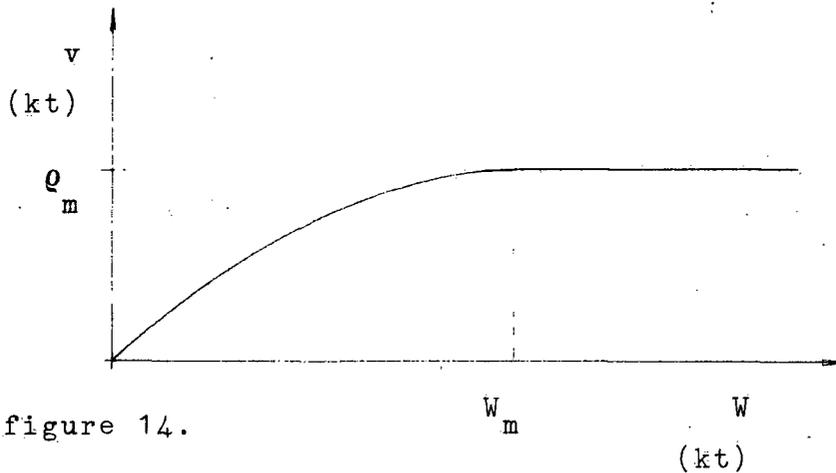


figure 14.

Cette polaire est définie comme suit : (18)

$$\begin{cases} \varrho(W) = 2 \varrho_m \left(\frac{|W|}{W_m} - \frac{1}{2} \left(\frac{W}{W_m} \right)^2 \right) & W \leq W_m \\ \varrho(W) = \varrho_m & W > W_m \end{cases}$$

Les valeurs suivantes caractérisent par exemple UBS-Switzerland :

$$W_m = 45 \text{ kt.} \quad \varrho_m = 20 \text{ kt.}$$

On astreint de plus le vent au sommet 2 à varier linéairement en fonction du temps :

$$W_2(T_1 - u) = W_2(T_1) - \mu u$$

où μ , exprimé en noeuds par heure, est le taux de variation du vent au sommet 2.

L'expression du vent moyen sur l'arc devient :

$$\begin{aligned} \bar{W}(T_1, u) &= \frac{1}{2} (W_1(T_1) + W_2(T_1 - u)) \\ &= w - \frac{1}{2} \mu u. \end{aligned}$$

On a posé : $w = \frac{1}{2} (W_1(T_1) + W_2(T_1))$.

Suivant la convention introduite ci-dessus, l'analogie de l'expression (17) est, pour l'ersatz de polaire :

$$u = \frac{d}{\varrho(\bar{W}(T_1, u))} = \frac{d}{\varrho(w - \frac{1}{2}\mu u)} = a_\mu(u)$$

et μ joue ici le rôle d'un paramètre de stabilité numérique. Cherchons à mettre en évidence un coefficient de contraction τ pour l'application a_μ ci-dessus :

Formons une suite $[u_i]_{i \geq 0} \subset D = [0, T_1]$ définie comme suit :

$$\begin{cases} u_{i=0} = 0 \\ u_i = a_\mu(u_{i-1}) \quad i \geq 1 \end{cases}$$

et évaluons, pour $k \neq l \geq 0$:

$$|a_\mu(u_k) - a_\mu(u_l)| = d \left| \frac{\varrho(w - \frac{1}{2}\mu u_l) - \varrho(w - \frac{1}{2}\mu u_k)}{\varrho(w - \frac{1}{2}\mu u_k) \varrho(w - \frac{1}{2}\mu u_l)} \right|$$

Posons $I = \min_{t \in D} \{ \frac{1}{2} |W_2(t) + W_1(T_1)| \}$ (existe car D est compact et W continue).

De plus, puisque l'application ϱ (18) est monotone non décroissante : $\varrho(I) \leq \varrho(\frac{1}{2}(W_2(t) + W_1(T_1))) \forall t \in D$.

On aboutit, à la suite d'une série de majorations, à

$$|a_\mu(u_k) - a_\mu(u_l)| \leq \frac{|\mu|^d \varrho_m}{W_m^2 \varrho^2(I)} (W_m + |w - \frac{1}{2}\mu \bar{u}|) |u_k - u_l|$$

où : $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_k + u_l)$.

Posons $S = \max_{t \in D} \{ \frac{1}{2} |W_2(t) + W_1(T_1)| \}$, on a $S \geq |w - \frac{1}{2}\mu \bar{u}|$ et

$$|a_\mu(u_k) - a_\mu(u_l)| \leq \underbrace{\frac{|\mu|^d \varrho_m}{W_m^2 \varrho^2(I)} (W_m + S)}_{\tau} |u_k - u_l|.$$

Appliquée à l'ersatz de polaire, la condition $\tau < 1$ conduit à l'inégalité suivante :

$$|\mu| < \frac{q_m I^2 (2W_m - I)^2}{d W_m^2 (W_m + S)} \quad (20)$$

Cette inégalité peut être écrite sous la forme $|\mu| < \frac{I^2}{d} \cdot \text{cste}$ où

$$\text{cste} = \frac{q_m}{W_m^2} \frac{(2W_m - I)^2}{W_m + S}, \text{ le premier terme décrivant l'er-}$$

satz de polaire, le second dépendant essentiellement des majorations effectuées. De manière générale, en considérant que $I < W_m$ (ce qui est raisonnable), on observe les faits suivants :

- * Pour un arc de longueur donnée, le champ de vent doit être d'autant plus stable que le vent est faible :
 - . de forts vents (I grand) peuvent être fortement variables ($|\mu|$ grand)
 - . des périodes de calme doivent en revanche être stables (I petit requiert $|\mu|$ petit).
- * Cette contrainte est d'autant plus restrictive que la longueur de l'arc est grande.

Etant donné les majorations effectuées, les inégalités ci-dessus expriment des conditions suffisantes pour qu'un algorithme de relaxation estimant la durée du trajet le long d'un arc converge. Elles indiquent les précautions devant être prises lorsqu'on envisage la relaxation avec une polaire réelle à deux paramètres :

- I. La longueur maximale des arcs pris en compte pour la relaxation doit être limitée.
- II. Le fichier des vents doit avoir une structure telle que $|\mu|$ soit petit.
- III. Le calcul des durées de parcours dans les arcs du Graphe doit être effectué à l'aide d'un algorithme de relaxation équipé d'une structure de contrôle permettant d'interdire les arcs pour lesquels la relaxation diverge.

Abordons ces trois points.

I. L'ensemble $A(k-1)$ introduit à la page 14 dans l'expression $T_{kl} = \max_{j_{k-1} \in A(k-1)} (T_{k-1, j_{k-1}} - \Delta_{kl}^{j_{k-1}})$ est remplacé par

l'ensemble $H_1(k-1)$ défini comme suit :

$$H_1(k-1) = \left\{ j \in \left\{ \max(\inf(k-1), l-L) \dots \min(\sup(k-1), l+L) \right\} \right. \\ \left. \text{et} \right. \\ \left. \text{admissible}(k-1, j) \right\}. \quad (21)$$

Cet ensemble interdit la traversée en diagonale dans le Graphe et limite ainsi la longueur des arcs. Le paramètre L doit être ajusté. Si l'on choisit à titre d'exemple $L=2$, le graphe de la figure 1 est réduit à :

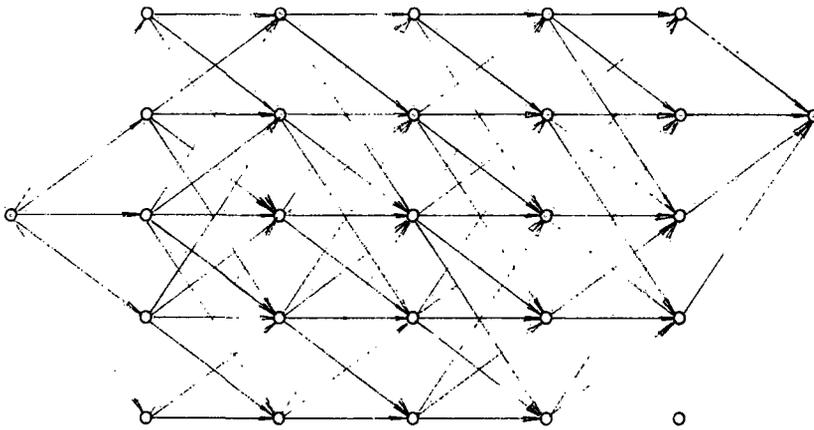


figure 15

II. Le champ de vent est mémorisé dans le programme de calcul des routes dans une matrice

((0..50) x (-13..+13) x (0..33) x 2) où :

- . (0..50) x (-13..+13) recouvre l'ensemble des sommets du graphe (extension spatiale)
- . (0..33) recouvre les échéances d'observation, par pas de 24 heures, de 0 h. à 792 h. (extension temporelle)
- . 2 représente les composantes du vecteur vent en chaque sommet.

Le vent soufflant en un sommet quelconque (k,l) du Graphe est donc représenté en machine par ses composantes zonale et méridionale données à chaque échéance temporelle (figure 16 a).

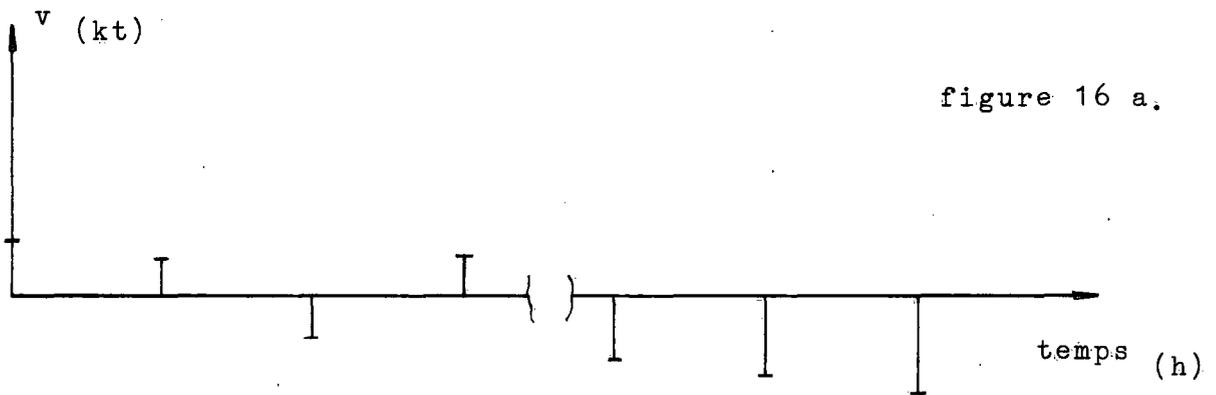
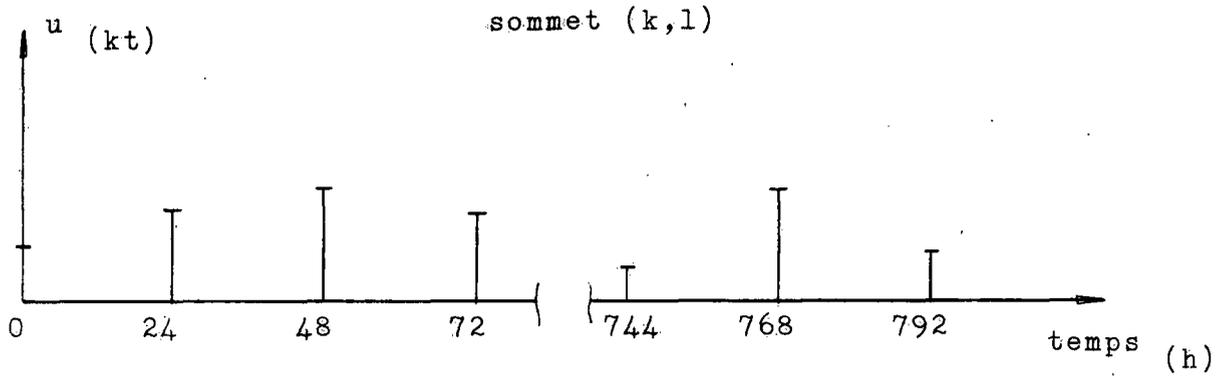


figure 16 a.

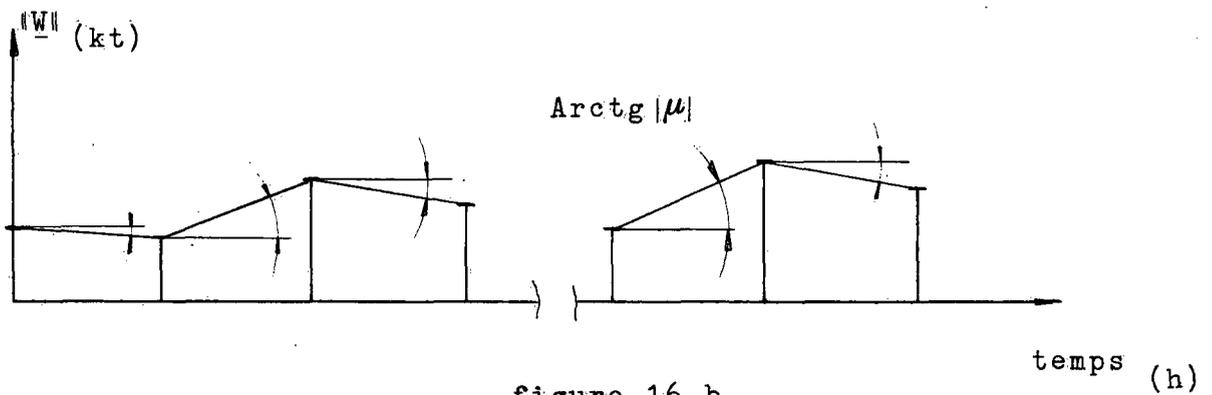
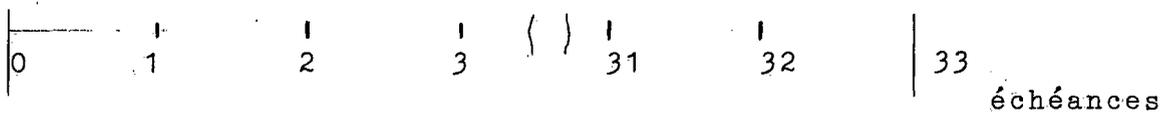


figure 16 b.

Le vent soufflant en chaque sommet du Graphe est calculé par interpolation linéaire à tout instant différent d'une échéance. La figure 16 b. représente le module du vent soufflant en un sommet. Le paramètre de stabilité numérique $|\mu|$ peut être représenté par la pente des segments joignant les valeurs du vent à chaque échéance.

Il est raisonnable d'estimer peu fréquente une variation de 50 noeuds en 24 heures du vent à 10 mètres d'altitude calculé par les procédures d'analyse et d'initialisation du modèle numérique du Centre Européen. On peut donc considérer que $|\mu| \approx 2$ noeuds par heure est un ordre de grandeur réaliste du taux de variation maximum du vent en un sommet du Graphe. Il est par ailleurs clair qu'une diminution de l'intervalle séparant chaque échéance augmente l'ordre de grandeur de $|\mu|$.

Le fait de représenter le champ de vent en utilisant une unique valeur journalière est donc un facteur contribuant à assurer la convergence de la relaxation en limitant la valeur maximum de μ .

III. La durée du parcours d'un arc $(k,l) \longrightarrow (k-1, j_{k-1})$ est évaluée en introduisant la suite définie par :

$$\begin{aligned} (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^{s=0} &= 0 \\ (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^s &= \frac{d_{kl}^{j_{k-1}}}{e(\|\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}(T_{k-1}^{j_{k-1}}, (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^{s-1})\|, \alpha(\bar{w}_{kl}^{j_{k-1}}(\dots)))} \end{aligned} \quad (22)$$

Le contrôle de la convergence est réalisé en introduisant :

- . un nombre arbitraire positif fixé : ε
- . une borne entière : M.

L'algorithme procède comme suit :

$$(\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^{s=0} = 0 \quad (\text{initialisation})$$

. répéter :

$$(\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^s = \frac{d_{kl}^{j_{k-1}}}{\rho(\|\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}}(T_{k-1} j_{k-1}, (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^{s-1})\|, \alpha(\bar{W}_{kl}^{j_{k-1}}(\dots)))}$$

. jusqu'à ce que

$$a) \quad \left| (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^s - (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^{s-1} \right| < \varepsilon$$

ou

$$b) \quad s > M$$

ou

$$c) \quad T_{k-1} j_{k-1} - (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^s \notin [0, T_{k-1} j_{k-1}]$$

Appelons $(\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^*$ = $(\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^s$ la durée calculée lorsque a et non(b ou c) est vrai. Cette durée n'est pas définie lorsque l'expression booléenne est fausse.

Un arc dont la durée $(\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^*$ ne peut pas être calculée n'est pas pris en compte par l'algorithme choisissant les successeurs lors de la construction de l'arbre.

Le pas d'induction de cet algorithme de construction de l'arbre (page 14) est donc modifié comme suit :

Pas d'induction :

Le sommet (k,l) reçoit :

$$. \text{ heure} = \max_{j_{k-1} \in H_l(k-1)} (T_{k-1} j_{k-1} - (\Delta_{kl}^{j_{k-1}})^*).$$

. successeur = j_{k-1} pour lequel le maximum inscrit dans heure est réalisé.

. admissible = vrai si un successeur au sommet (k,l) est trouvé
faux si non.

Les paramètres de contrôle de la relaxation doivent être mutuellement ajustés. La combinaison suivante s'est révélée satisfaisante :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 10^{-3} \quad (\text{h.}) \\ M &= 10 \\ L &= 4.\end{aligned}$$

La relaxation diverge lorsque la vitesse du voilier est insuffisante. L'arc considéré est alors exclu par le dispositif de contrôle.

Cette situation se produit naturellement lorsque le vent moyen soufflant sur l'arc est faible. Elle se produit également lorsque l'angle d'incidence du vent moyen sur l'arc est inférieur à l'allure au plus près tolérée par le voilier. Il est clair enfin qu'une variabilité trop grande du champ de vent entraîne la divergence de la relaxation.

Les deux premières circonstances dans lesquelles l'arc est exclu doivent être considérées comme saines : Les centres des anticyclones sont évités, ainsi que les arcs le long desquels une navigation vent debout devrait être tentée. La variabilité du champ de vent trahit en revanche une faiblesse intrinsèque à la relaxation. Celle-ci ne peut être que partiellement palliée par le choix d'un intervalle suffisamment grand entre chaque échéance temporelle.

L'introduction du dispositif de contrôle de la convergence n'est pas sans conséquence pour l'algorithme de programmation dynamique : Celui-ci peut en effet échouer dans sa tentative de construire un arbre dont une branche lie le sommet de départ à celui d'arrivée.

8. UTILISATION.

L'ensemble du dispositif présenté dans les pages précédentes a été programmé en Pascal. L'écriture et la mise au point des programmes a été effectuée sur une machine Hewlett-Packard 9816. Ces programmes ont ensuite été transportés et exécutés sur le Cyber 855 de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Afin de définir à priori les options devant être envisagées en chacune des quatre étapes de la Course autour du Monde, un certain nombre de courses du voilier UBS-Switzerland caractérisé par sa polaire ont été simulées sur des situations météorologiques réelles du passé.

A cette fin, les champs suivants ont été extraits des archives du Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme (ECMWF) :

- . Vents soufflant à 10 mètres d'altitude au dessus de la surface de la mer.

Etape de la Course	Aire couverte
Porthmouth - Cap Town	30 N - 40 S / 30 W - 20 E
Cap Town - Auckland	30 S - 56 S / 20 E - 180 E
Auckland - Punta del Este	30 S - 60 S / 170 E - 50 W
Punta del Este - porthmouth	40 S - 50 N / 60 W - 0.

- . Pas de grille = 2 degrés tant en latitude qu'en longitude.
- . Pas dans le temps = 1 champ toutes les 24 heures, donné à 0 heure GMT.
- . Données collectées de 1981 à 1985 en choisissant pour chaque étape la période de l'année au cours de laquelle l'étape réelle devait se dérouler.

Entre 20 et 30 simulations ont été effectuées pour chacune des quatre étapes de la Course, sur des Graphes de 51 x 27 sommets et durant des périodes s'étendant au plus sur 792 heures de navigation.

Un exemple de simulation est présenté ci-dessous pour chaque étape de la Course. Chacune des figures 17 à 20 inclut le dessin de l'arbre (figures a) ainsi que celui de la route définitive choisie (figures b). Les vents représentés sur les figures b sont ceux qui soufflent aux sommets du Graphe à l'heure où l'algorithme ferait passer le voilier en ces sommets.

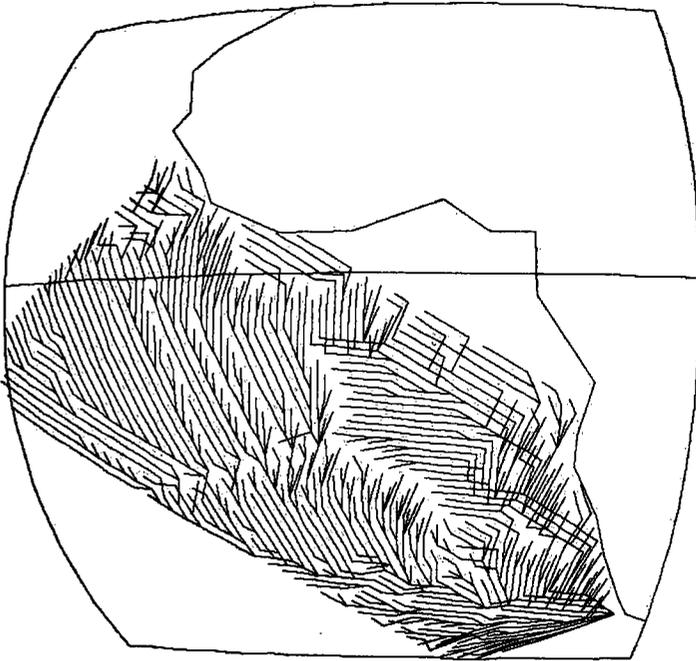


figure 17-a.

Première étape.

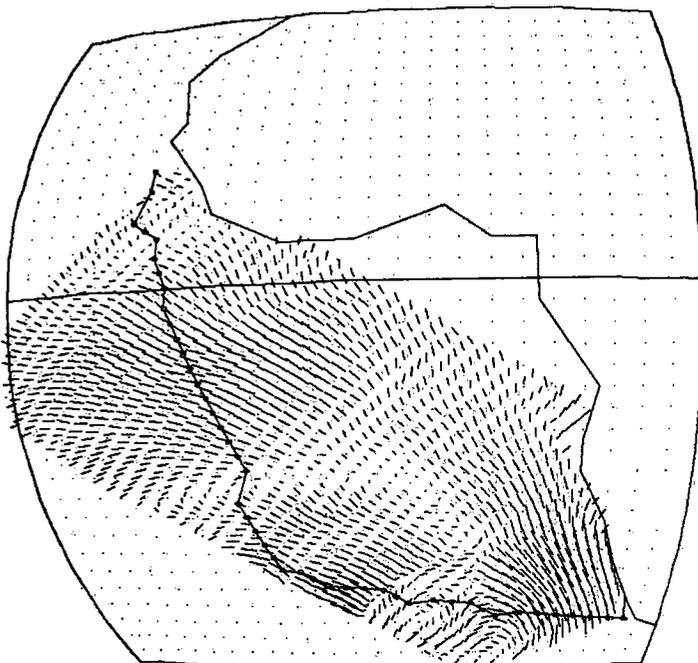


figure 17-b.

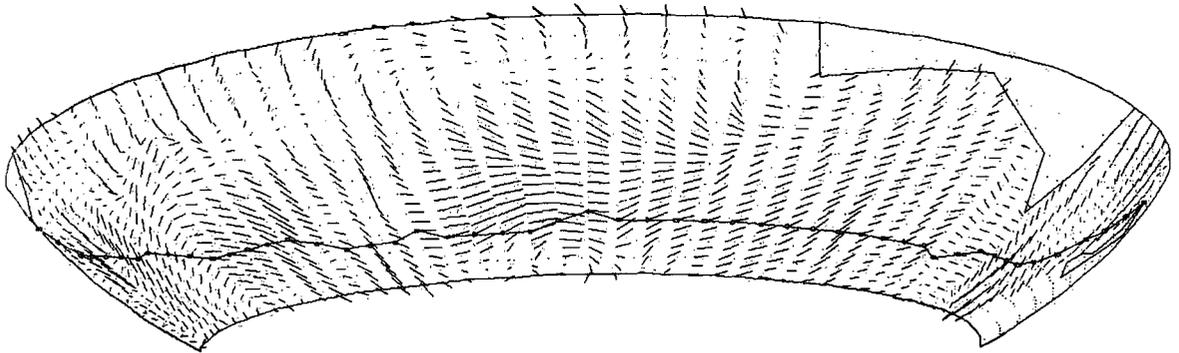
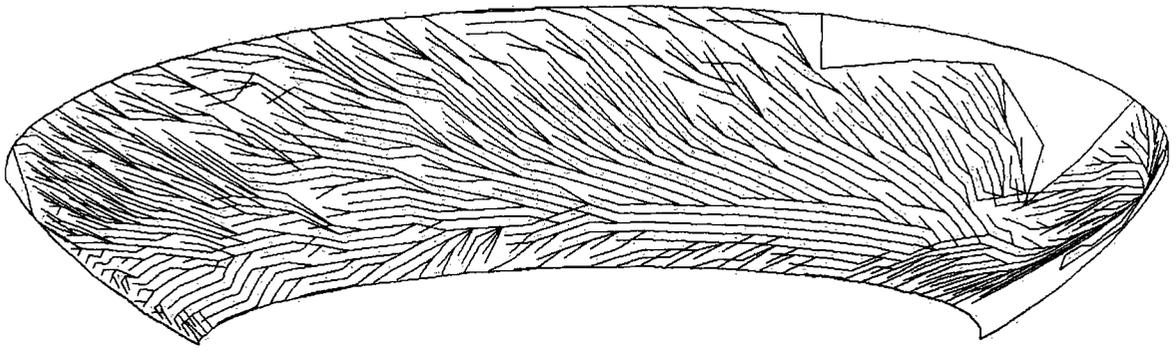


figure 18-a et b. Deuxième étape.

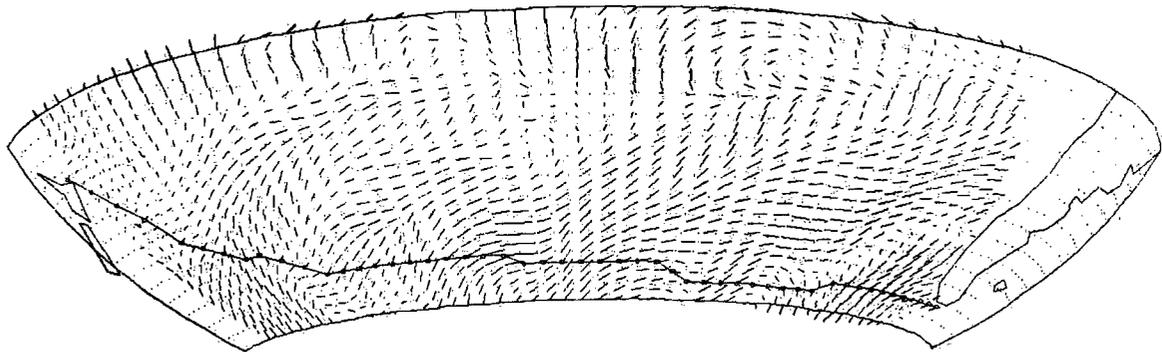
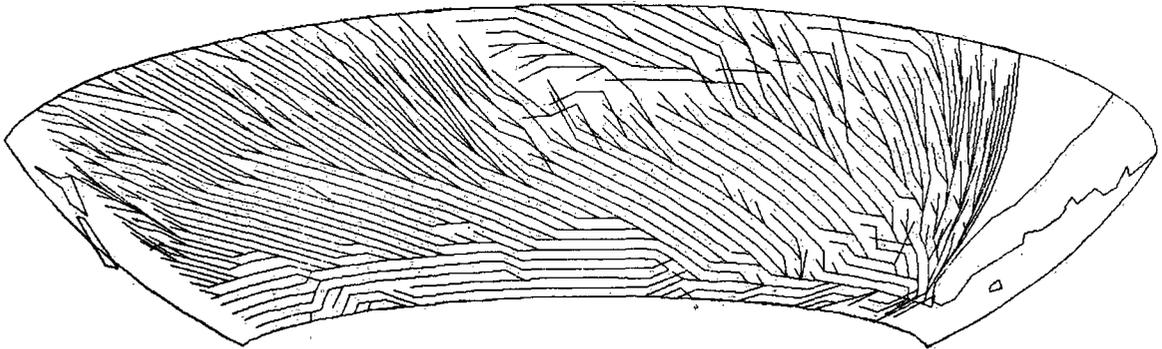


figure 19-a et b. Troisième étape.

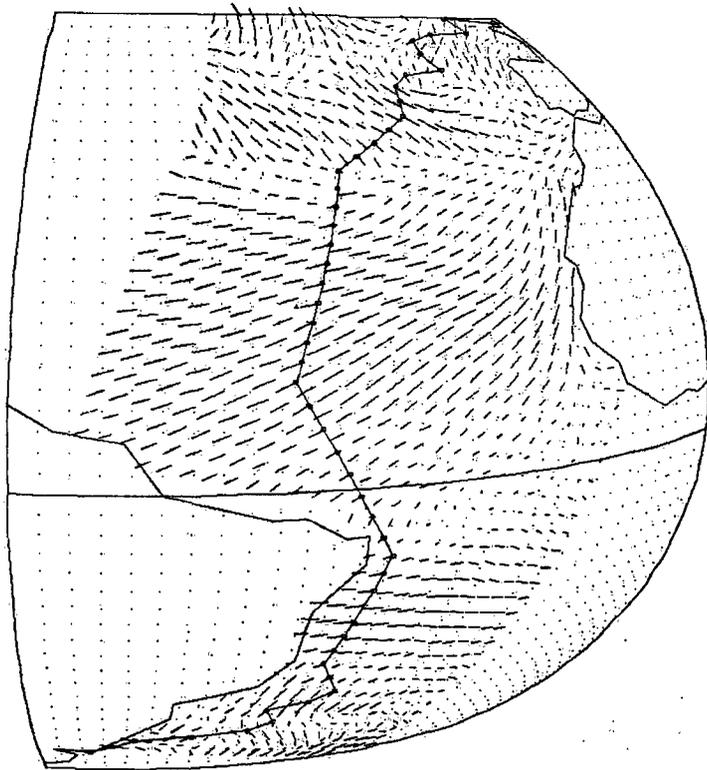
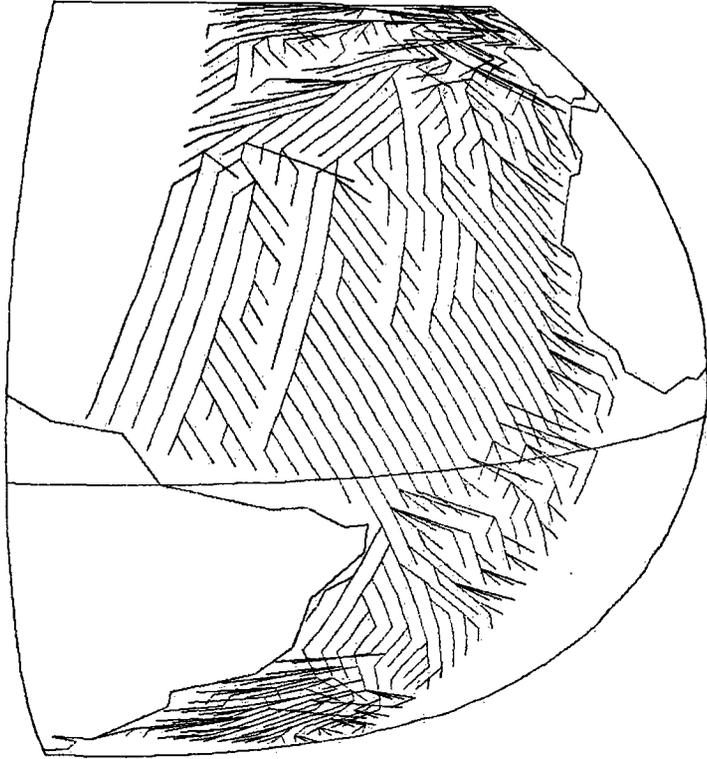


figure 20-a et b. Quatrième étape.

L'ensemble du matériel de simulation obtenu a été analysé avant chaque étape de la Course avec le skipper afin de discerner les meilleures options pouvant être envisagées. De manière plus précise, il s'est agi de répondre, pour chaque étape aux questions suivantes :

- . Est-il possible de repérer les passages obligés en lesquels une option critique doit être prise ?
- . Est-il possible de discerner les critères de décision permettant de choisir l'option ?
- . Est-il possible de faire des choix à priori ?

Le skipper disposait à bord d'un dossier comprenant les routes simulées et les champs de vent des périodes correspondantes (cartes du type de celles des figures 9).

La réception des informations météorologiques publiques sur un récepteur fac-similé étant autorisée par le règlement de la Course, le skipper pouvait comparer la situation météorologique actuelle avec les cas du passé et choisir une option en examinant les routes correspondantes élaborées par simulation.

Examinons très brièvement les quatre étapes :

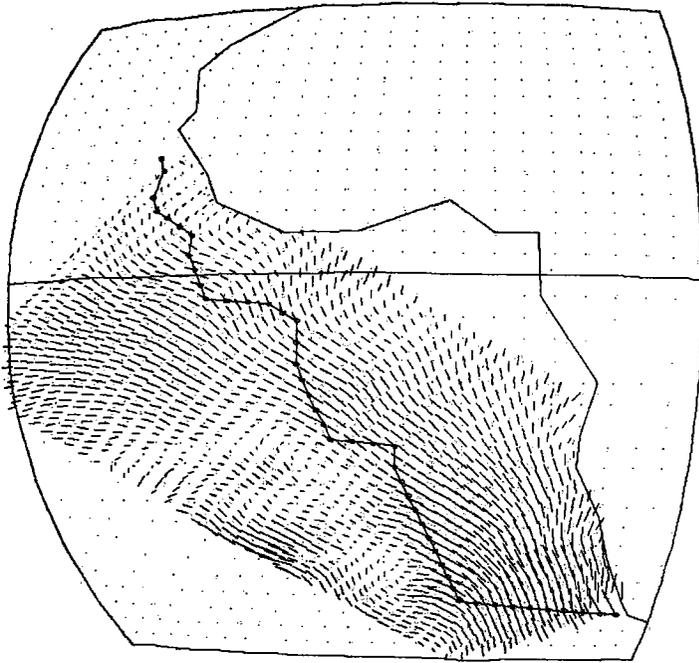
I. Première étape.

En cette première étape, la question cruciale est posée au skipper aux environs de 5° N, 20° W :

Est-il préférable en cet endroit de suivre une ligne directe en direction du Cap, en longeant le plus longtemps possible le flanc nord-est des alizés, soit en navigant au près (cf figures 9-a, 21-a et b), ou vaut-il mieux traverser rapidement le lit des alizés en direction du sud afin de gagner les latitudes où dominant les vents d'ouest associés à la circulation des dépressions australes, puis naviguer de ces régions plein ouest, vent arrière en direction du Cap (cf figures 22-a et b) ?

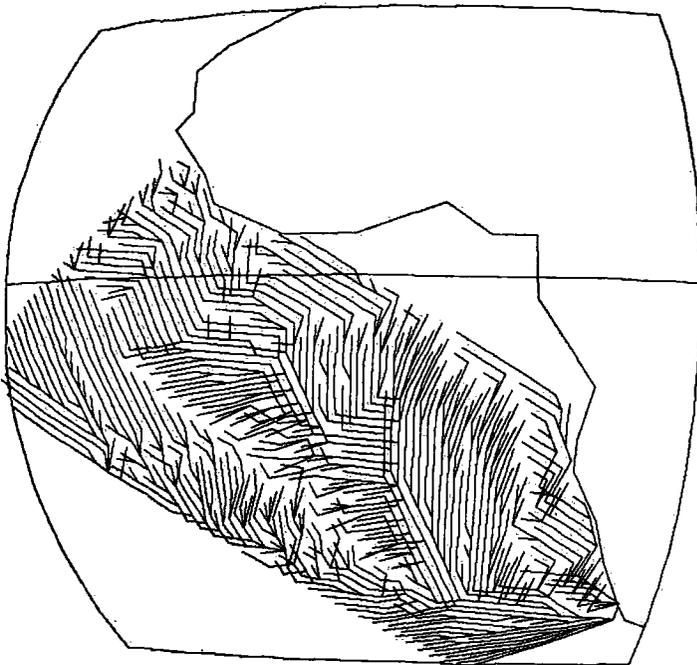
La simulation a fait apparaître, bien que de manière peu accentuée, que l'option directe longeant le flanc nord-est des alizés paraissait la plus favorable. En course, le skipper

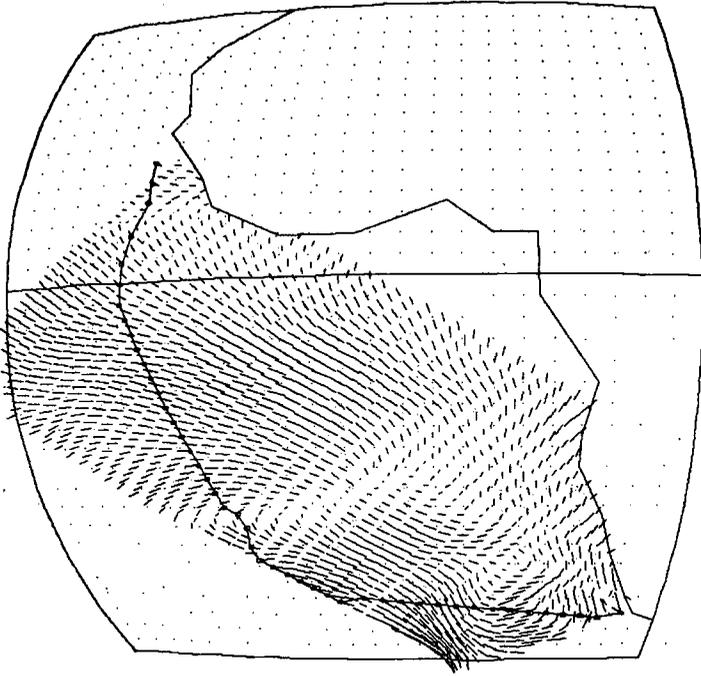
s'est référé à cette tendance à priori de la simulation en faveur de la route directe. Il a également été astreint, dans cette phase de l'étape, à contrôler d'autres concurrents engagés comme lui sur la route directe.



figures
21-a et b.

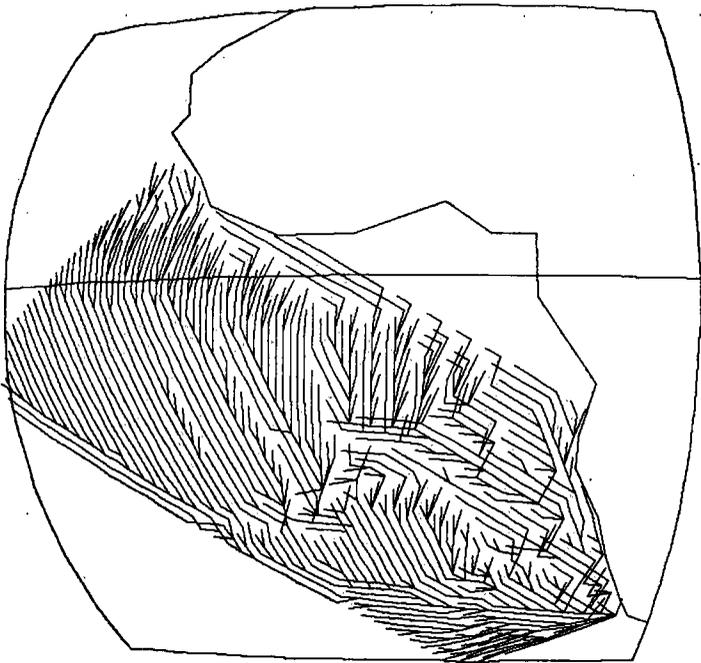
Route directe
(au près).





figures
22-a et b.

Route au sud.



Les bassins d'accumulation de décision évoqués à la page 15 sont visibles sur les figures 21-b et 22-b. Sur ces deux figures, la surface couverte par le Graphe est globalement divisée en deux bassins d'accumulation principaux séparés par une ligne de " partage des décisions ".

Le bassin recouvrant le nord-est du Graphe correspond à la région dans laquelle une route directe doit être choisie. Le bassin recouvrant le sud-ouest du Graphe correspond à la région

dans laquelle une route au sud doit être préférée. La ligne de partage des décisions s'étend sur la figure 21-b d'environ 0° N, 25° W à 14° S, 18° W puis à 33° S 2° W.

Le bassin des routes directes est nettement plus étendu sur la figure 21-b que ne l'est celui des routes au sud. La situation est inversée sur la figure 22-b où le bassin associé aux routes au sud est prédominant.

L'analyse montre que les extensions respectives des bassins d'accumulation "route directe" et "route au sud" dépendent de la position d'une cellule anticyclonique située, à l'époque de l'année où a lieu la première étape de la Course, à une latitude voisine de 20° S et à une longitude pouvant être comprise entre 15° W et 5° E approximativement.

II. Deuxième étape.

Celle-ci est parcourue vent arrière dans les régimes d'ouest forts associés à la circulation des dépressions du front polaire austral.

La variabilité des situations météorologiques rencontrées dans cette région du monde est grande, ainsi que l'illustrent les champs de vents présentés à la figure 9-b.

L'incidence de cette grande variabilité sur les résultats de simulation est suggérée à la figure 23 :

Il s'avère difficile, en cette deuxième étape, de discerner par simulation des options caractéristiques pouvant être avantageusement choisies. Quelques observations peuvent toutefois être avancées :

L'orthodromie séparant Cap Town d'Auckland passe très loin au sud dans les terres antarctiques. Le voilier est donc astreint à suivre une route qui est loin d'être optimale du point de vue de la navigation. Il convient par conséquent de choisir une route aussi australe que possible, ainsi que le fait l'algorithme, en construisant souvent des routes passant au sud des régions dans lesquelles soufflent, à un moment donné, les vents d'ouest les plus forts ($40^{\text{èmes}}$ rugissants).

Les options très australes ne sont toutefois pas sans danger

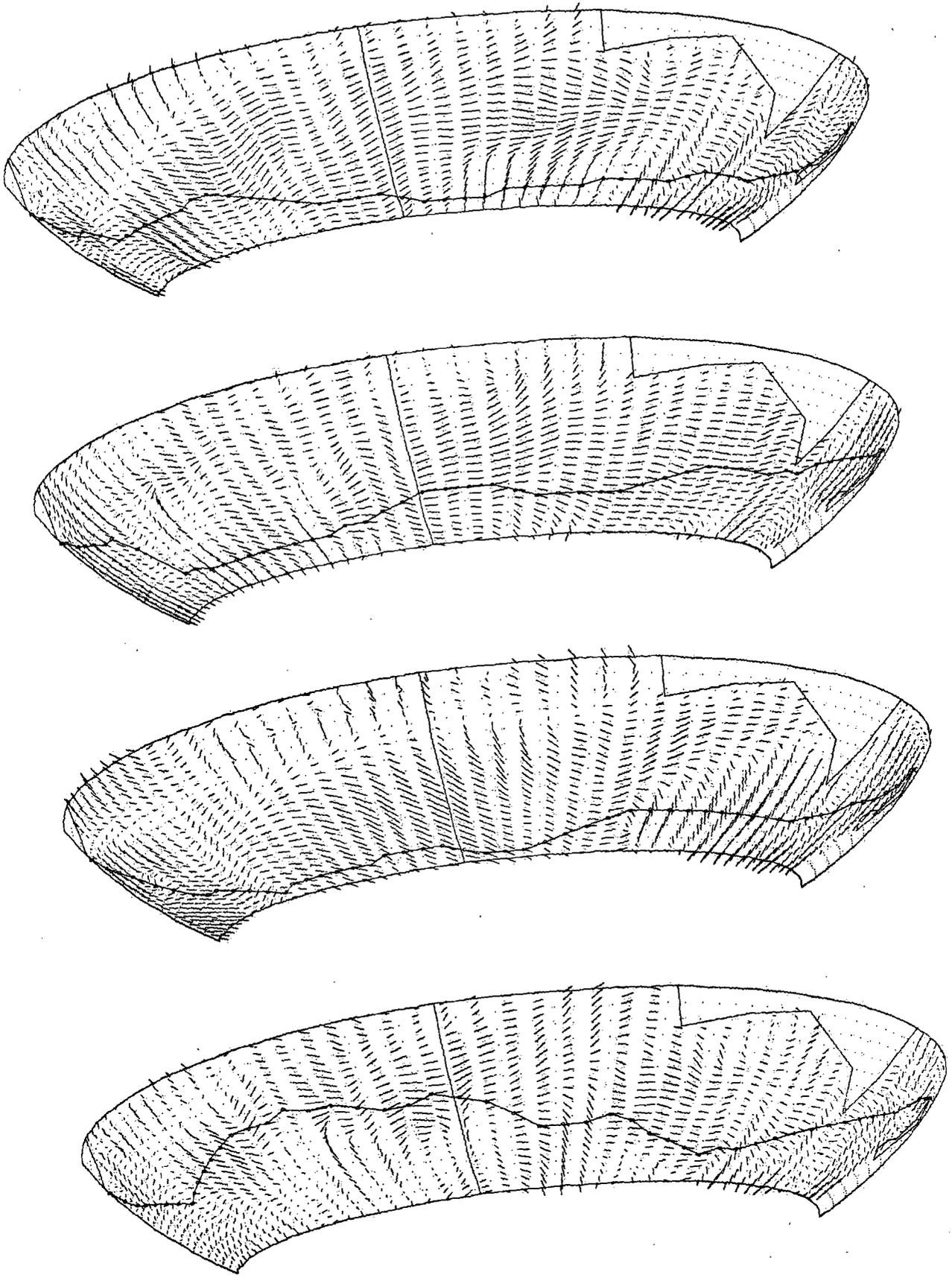


figure 23.

pour la navigation. La deuxième étape est en effet parcourue au printemps austral, à l'époque où les icebergs détachés de la banquise antarctique commencent à dériver en direction du nord.

III. Troisième étape.

Les remarques relatives à la variabilité des champs météorologiques de la deuxième étape sont encore valables pour la troisième. De même, l'orthodromie liant Auckland au Cap Horn, passage obligé, pénètre profondément sur le continent antarctique.

Curieusement, la stabilité des routes calculées d'Auckland au Cap Horn est relativement bonne. Il apparaît en effet régulièrement qu'une orthodromie soit choisie par l'algorithme d'Auckland à un point situé environ à $55 - 60^{\circ}$ S, $140 - 120^{\circ}$ W, puis que le voilier soit astreint à naviguer selon une loxodromie de cet endroit jusqu'au Cap Horn. Un certain nombre de ces routes sont illustrées, cette fois à l'aide des arbres, à la figure 24.

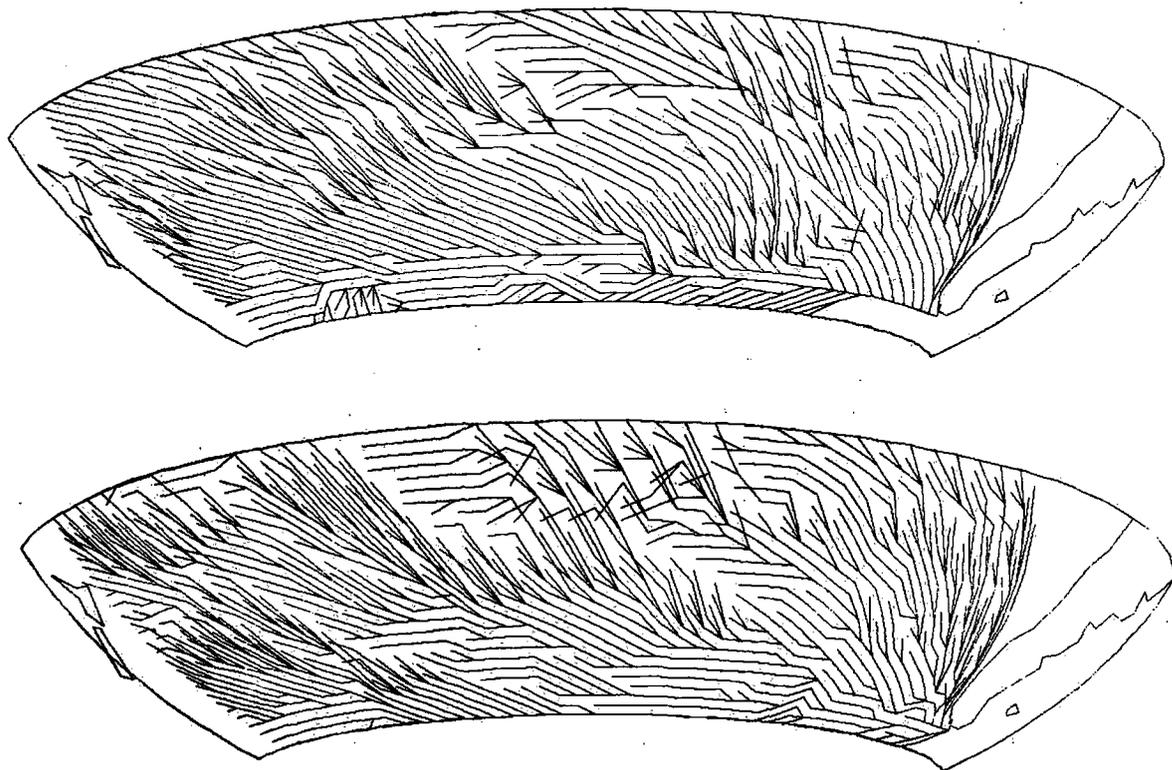


figure 24.

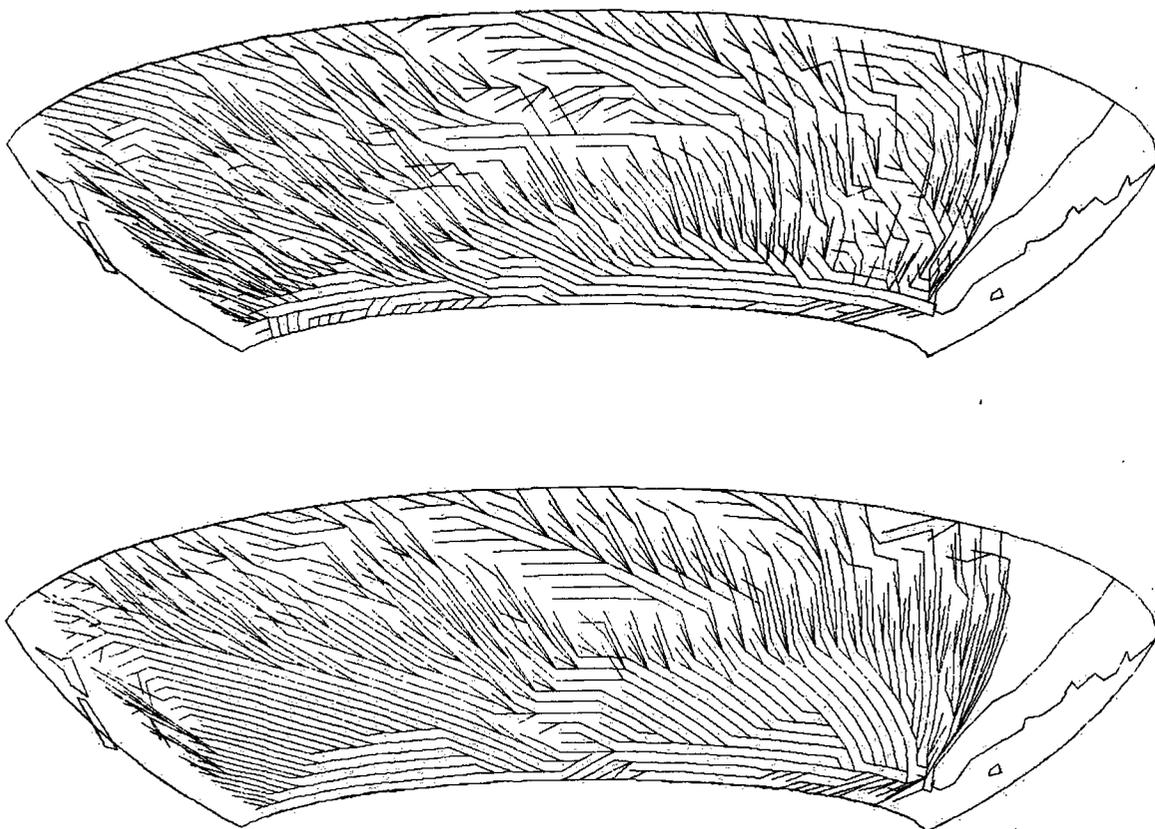


figure 24.

La section conduisant du Cap Horn à Punta del Este n'a pas fait l'objet de l'étude de simulation. Les éléments locaux, Pamperos, options tactiques de contrôle de course, jouent en effet un rôle prédominant dans cette section et ne peuvent être correctement simulés.

IV. Quatrième étape.

La circulation des alizés dans l'Atlantique (du SE au NW dans l'hémisphère sud, du NE au SW dans l'hémisphère nord) est telle que les problèmes posés au skipper lors de la quatrième étape sont les mêmes que ceux qui lui sont posés lors de la première, à une symétrie axiale près, l'axe de symétrie étant l'équateur.

La question cruciale consiste à nouveau à déterminer s'il est judicieux de passer à l'est de l'anticyclone des Açores en remontant au près serré les alizés le long de la côte africaine

ou s'il est au contraire préférable de se laisser déporter en navigant au près ou au près bon plein dans les alizés afin de contourner par le nord l'anticyclone et profiter des vents d'ouest associés à la circulation des dépressions du front polaire.

Les simulations effectuées sur des situations du début du printemps conduisent le plus souvent à choisir la route contournant l'anticyclone (figure 25). Plus tard dans la saison, à l'époque à laquelle la quatrième étape est effectivement parcourue, les routes directes, suivant les côtes marocaines et portugaises, sont le plus souvent choisies (figures 26 et 27).

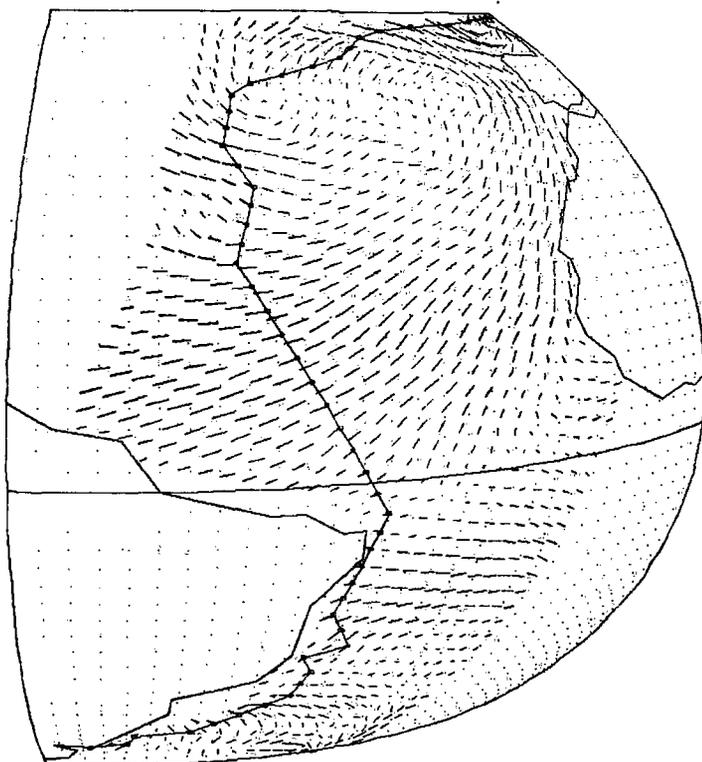


figure 25

L'examen des situations météorologiques correspondantes a mis en évidence une relation existant entre le choix d'une route directe et la présence d'une dépression quasiment stationnaire

au large du Portugal. La route directe comporte cependant un passage difficile approximativement situé entre les Iles du Cap Vert et les Açores durant lequel la progression doit être assurée en tirant des bords au près dans des airs faibles.

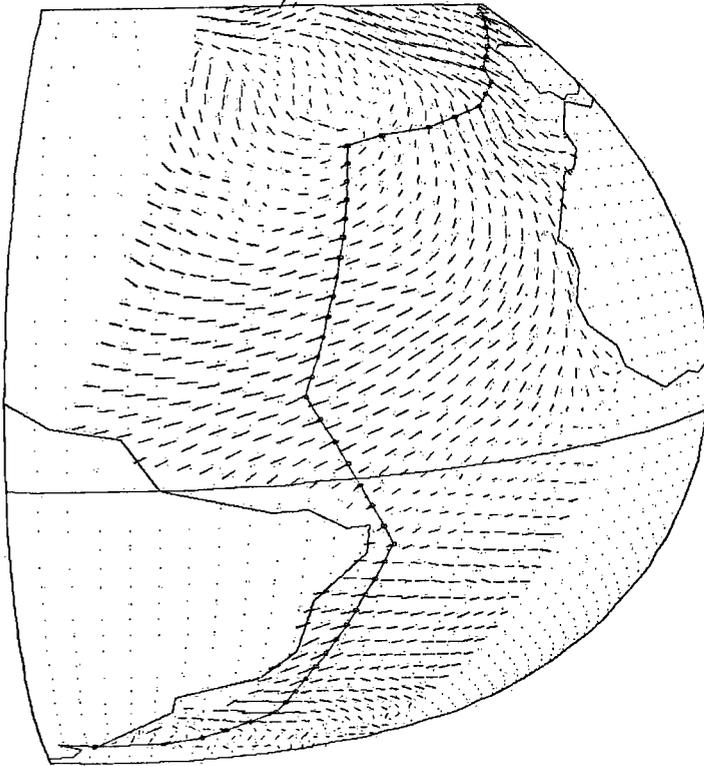


figure 26.

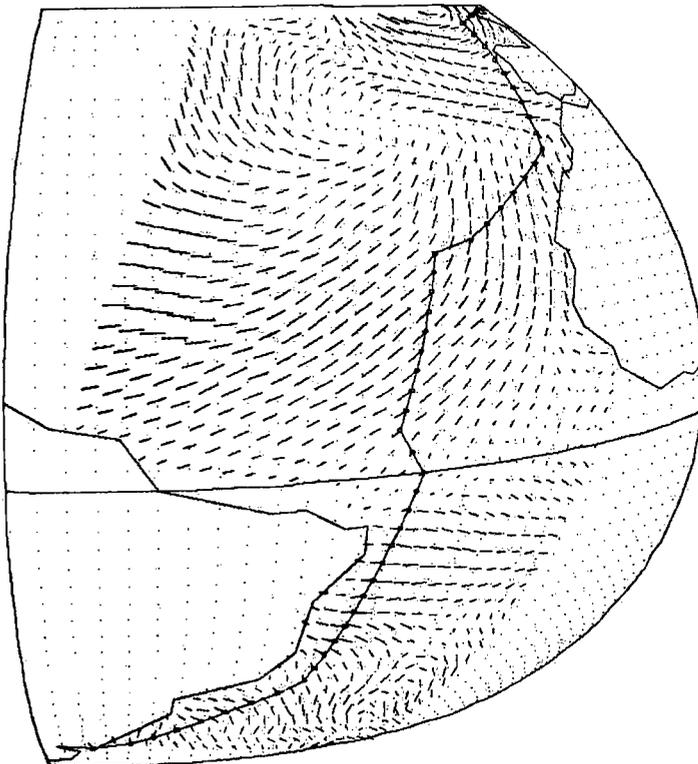


figure 27.

L'existence d'une faible zone dépressionnaire stationnaire située dans la région Golfe de Gascogne - Portugal au cours de la remontée le long de la côte africaine, l'aptitude de l'équipage à maîtriser parfaitement des situations difficiles au près par airs faibles, la connaissance fine de la polaire réelle du voilier, enfin l'inclination à priori du modèle à choisir une route directe dans les conditions évoquées ci-dessus, tous ces éléments ont contribué à guider le skipper à l'est de l'anticyclone des Açores, malgré la perte du contrôle tactique des autres concurrents engagés dans cette quatrième étape.

9. CONCLUSION.

La possibilité de calculer un grand nombre de routes satisfaisant un principe d'optimalité intégrant :

- . des données météorologiques objectives disponibles sur une vaste région ainsi qu'en termes de leur évolution temporelle
- . les performances du voilier

permet de réunir un bagage d'informations relatives à chaque étape de la Course qu'il est difficile d'obtenir par quelques navigations réellement effectuées dans la région concernée.

Ce bagage ne doit pas être considéré comme un instrument de décision automatique pouvant être substitué au jugement du skipper lorsque des décisions doivent être prises.

Il s'apparente plutôt à un ensemble d'informations passives qui, lorsqu'elles sont consultées, peuvent affiner le jugement du consultant.

La question s'est posée de savoir s'il eut été préférable de développer une méthode basée sur l'exploitation de données statistiques ou climatologiques (pilot - charts par exemple). Il nous est initialement apparu plus instructif de disposer d'un ensemble de cas aussi voisins qu'il se peut des conditions réelles de Course et non pas de routes moyennes ou de moyennes de routes.

La voie à notre sens la plus prometteuse dans la direction de l'exploitation de données statistiques résiderait dans la mise en oeuvre d'un algorithme de programmation dynamique stochastique.

Les poids respectifs des options seraient alors, pour autant qu'elles soient discernables, exprimés en termes de probabilités.

La compilation d'un ensemble de cas conduisant à la formation de critères qualitatifs de jugement céderait le pas à un dispositif permettant de quantifier objectivement les valeurs

respectives des diverses options de course, pour un voilier donné, dans une région donnée du monde et à une époque donnée de l'année.

La question de savoir si l'algorithme stochastique parviendrait à discerner les options est importante. L'expérience acquise lors de la Course autour du Monde apporte un élément de réponse :

La programmation dynamique classique met relativement bien en évidence les options des routes devant être choisies dans des régions situées à des latitudes comprises entre 40° S et 40° N environ, dans lesquelles la stabilité climatique est prédominante.

La réponse est en revanche nettement plus diffuse lorsque les choix doivent être faits dans les régions plus australes ou plus septentrionales où circulent les dépressions associées aux fronts polaires.

Les navigateurs expriment cela en affirmant que les étapes australes de la Course (la deuxième et la troisième) sont tactiques tandis que les options stratégiques prédominent dans la première et la dernière.

Il paraît donc raisonnable d'estimer que l'algorithme stochastique serait efficace dans les régions équatoriales et tropicales pour estimer les options stratégiques globales de navigation d'un voilier donné.

Il serait en revanche de peu d'utilité dans les régions situées aux latitudes plus élevées où la variabilité climatique est grande.

La solution consisterait, aux latitudes élevées, à coupler l'algorithme classique de programmation dynamique à un modèle numérique de prévision météorologique opérationnel.

Le programme de calcul des routes serait exécuté chaque jour sur un ordinateur installé à terre, utilisant les prévisions de vent à la surface de la mer livrées par le modèle numérique. Une option de navigation serait ensuite transmise au skipper.

Outre qu'un tel dispositif contreviendrait au règlement actuel de la Withbread, un certain nombre de problèmes techniques

devraient être abordés :

La prédictabilité des modèles numériques étant actuellement limitée à une dizaine de jours, des objectifs de route intermédiaires devraient être définis à la main, chacune des quatre étapes de la Course requerrant plus de dix jours de navigation.

Le fait de devoir définir à la main de tels objectifs intermédiaires oblitérerait l'optimalité de tout le processus. Une parade pourrait consister à inverser l'arbre, en l'enracinant à l'endroit où se trouve le voilier, et à le faire croître en direction de l'arrivée. La position du sommet de départ de l'arbre serait donc recalculée chaque jour en actualisant la position du voilier. Le sommet arrivée ne serait en revanche plus défini. Le sommet terminal de l'arbre ayant permis le trajet de plus courte durée, au sens de la première des formulations proposées à la page 11, serait choisi comme but intermédiaire.

Outre la pénalisation introduite par la sub-optimalité, à notre sens incontournable, la qualité des décisions prises serait naturellement dépendante de la qualité des prévisions livrées par le modèle numérique.

La qualité des prévisions des vents à la surface de la mer est, pour les modèles numériques globaux actuellement disponibles, essentiellement dépendante de la latitude.

La prédictabilité de ces vents est au plus de sept jours aux latitudes moyennes et élevées, elle ne dépasse en revanche guère deux jours dans les régions tropicales et équatoriales.

Cette limitation suggère de quelle manière la complémentarité des deux approches - programmation dynamique classique ou stochastique, respectivement couplage au modèle numérique - pourrait être mise à profit en vue de perfectionner le dispositif d'aide à la navigation hauturière :

L'approche classique ou stochastique serait choisie dans les régions tropicales et équatoriales et répondrait aux interrogations de nature plutôt stratégique posées par le skipper.

Le système classique couplé à un modèle numérique serait préféré aux latitudes moyennes ou élevées. En fonctionnant à plus court terme, il contribuerait à guider le skipper dans ses options tactiques de course.

9. BIBLIOGRAPHIE

Navigation et intelligence artificielle.

Michel Alquier

Pour la Science Août 1986

Combinatorial optimization. Networks & Matroids

Eugen Lawler

ed. Holt, Rinehart, Winston.

Technical report N°49, ECMWF : A study of the ECMWF
operational forecast model in the tropics

Masano Kanamitsu

ECMWF.

Auteurs : Jacques Ambühl

Centre Météorologique de l'aéroport de Genève
CH-1215 Genève 15.

Pierre Eckert

Centre Météorologique de l'aéroport de Genève
CH-1215 Genève 15.

